目　录

序　　言

本习题集包含在综合性大学物理数学系讲授的微分几何课程的基本章节范围内的一千多道习题和练习题。在这版的准备时，作者力求考虑到目前在数学教学中发生的变化。

中学转到新的教学大纲导致了教学方法、术语及符号的变化，在此书中我们尽力巩固和发展这些革新。我们无条件地采用在中学里惯用的所有术语和符号，特别注意在微分几何课程中被研究的基本对象的确切定义。对于曲线（线）给出两种定义。即一方面，曲线被定义为等价参数表示道路的类；另一方面，引入作为一维流形的线的概念。曲面被看作为二维流形并通常借助其参数表示给出。大多数题目可从局部观点来解决，即在确定点的邻域内研究几何图形。

在本书的叙述中作者力求将微分几何课程同其他数学课程结合起来，主要用到线性代数、数学分析和微分方程的工具，并特别注意与中学几何和解析几何的联系。

全书包括概论、六章及二十一节。

此书可推荐为综合性大学和师范学院物理数学系的教学参考书。

符　　号

$\{a, b, c, \cdots\}$—由元素 $a, b, c, \cdots$组成的集合；

$\{x \mid x$具有性质$P\}$——所有具有给定性质P的元素的集合；

$x \in A$——x是集合A的元素（x属于A）；

$A \subset B$——集合A是集合B的子集；

$A \cup B$——集合A和B的并；

$A \cap B$——集合A和B的交；

$A \setminus B$——集合的差；

$\varnothing$——空集；

R——所有实数的集合；

$\forall$——任一个；

$\exists$——在在；

$p \Longrightarrow q$——由p得出q；

$p \Longleftrightarrow q$——p和q等价；

$\overline{a} \cdot \overline{b}$——矢量的数量积；

$\overline{a} \times \overline{b}$——矢量的矢量积；

$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$——矢量的混合积。

所有其他符号将在本文中阐明。

概　　论

映　　射

设X和Y是任意的非空集合，如果集合X的每一个元素与集合Y中的某个元素相对应，那么说给出了集合X到集合Y内的一个映射。映射用字母f表示，在此记为

$$f: X \to Y, \quad x \mapsto f(x) \qquad (1)$$

元素 $y = f(x)$ 称为元素x的象。如果 $A \subset X$，则集合

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

称为集合A的象，集合 $f(X)$ 称为映射f的象。

若 $f(X) = Y$，则称f是集合X到集合Y上的映射，或者称f是满射。如果

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

则称映射f是内射。同时是满射和内射的映射称为双射。这种映射确定了集合X和Y的元素之间的一一对应。对于双射f存在逆映射：

$$f^{-1}: Y \to X, \quad f(x) \mapsto x,$$

它同样也是双射。

如果 $A \subset X$，那么可以观察映射(1)在A上的限制：

$$f|_A: A \to Y, \quad a \mapsto f(a), \text{这里 } a \in A。$$

当将实数集合R作为Y，则称映射(1)为函数。

设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 均为映射，那么能确定映射

$$g \circ f: X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)),$$

它称为映射 f 和 g 的合成。

两个集合 X 和 Y 的直积（或笛卡尔积）是所有的偶（x, y）的集合，其中，$x \in X$, $y \in Y$：

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}。$$

空 间 R^n

由 n 个实数的有序组（x_1, x_2, $\cdots x_n$）组成的集合

$$R^n = \{(x_1, x_2, \cdots x_n) | x_1, x_2, \cdots x_n \in R\}$$

能够赋予不同的结构。R^n是 n 维实矢量空间，据此R^n中的元素可称为矢量，并用符号$\overline{a}$，$\overline{b}$，$\overline{x}$，$\overline{y}$，…表示。由矢量

$$\overline{i}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \quad \overline{i}_2 = (0, 1, 0 \cdots, 0), \quad \cdots\cdots,$$

$$\overline{i}_n = (0, 0, \cdots, 1),$$

组成的空间R^n的基称为规范基。在R^3中的规范基用（$\overline{i}$，$\overline{j}$，$\overline{k}$）表示。

我们可将R^n看作为与矢量空间R^n联系在一起的点的仿射空间。此时R^n的元素既可看作是点，并用符号M，N，…表示，也可看作是矢量$\overline{a}$，$\overline{x}$，…。

矢量$\overline{r}$ =（x_1，$\cdots x_n$）关于规范基具有坐标x_1，x_2 …，x_n，点A（x_1，…，x_n）关于标架（O，$\overline{i}_1$，$\overline{i}_2$，$\overline{i}_3$，$\cdots \overline{i}_n$）具有同样的仿射坐标，其中$O = (0, 0, \cdots, 0)$是坐标原点。

如果使空间R^n的任意两个矢量$\overline{x} = (x_1, x_2 \cdots x_n)$和

$\overline{y}=(y_1, y_2, \cdots y_n)$与称为矢量$\overline{x}$和$\overline{y}$的数量积的数：

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

相对应，那么R^n成为n维欧基里德空间。在这个空间中能引入两点：$M=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$N=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$间的距离的概念：

$$|MN|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}。$$

特别是，对中学数学课程中研究的平面和空间，如果在它们中选取笛卡尔坐标系，则能够分别看作为R^2和R^3。

集合

$$B(A, \varepsilon)=\{M\in R^n|AM|<\varepsilon\}$$

称为球心在点A，半径为$\varepsilon>0$的球，这个球称为点A的ε邻域。

R^n的子集U称为开集，如果对它的每个点A，它都包含球心在A的某个球。所有包含点A的开集都称为该点的邻域。

点$A\in R^n$称为集合$U\in R^n$的接触点，如果这个点的任何邻域至少包含U里的一个点。集合U的所有接触点的总合称为集合U的闭包，并用符号$\overline{U}$表示。如果$\overline{U}=U$，则集合U称为闭的。

如果不存在不交的开集U_1和U_2，这两个开集将集合V分为两个非空子集V_1和V_2，使$V_1\subset U_1$，$V_2\subset U_2$，则集合$V\subset R^n$称为连通的。开连通集合称为区域，区域的闭包称为闭区域。

如果集合U内的点连同它的某个邻域都属于集合U，则

该点称为集合U的内点。集合U的所有内点的总合称为该集合的内部。

如果在点$M\in R^n$的任何邻域中既存在属于集合$U\subset R^n$的点，又存在不属于集合U的点，则点M称为集合U的边界点。集合U的所有边界点的总合称它的边界，并用符号∂U表示。

在空间R^n中所有点的子集皆称为空间R^n的图形Φ。给出一个含有x_1，x_2，…，x_n的方程称为图形Φ的方程，如果R^n的属于图形Φ的点且仅仅是属于图形Φ的点满足此方程。设$l: R^m\to R^n$是一个线性映射，$(\overline{i}_1, \overline{i}_2, \cdots, \overline{i}_m)$是$R^m$的规范基，$('\overline{i}_1, '\overline{i}_2, \cdots, '\overline{i}_n)$是$R^n$的规范基，并设

$$l(\overline{i}_k)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jk}{}'\overline{i_j}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots m)$$ 。矩阵

$$(\alpha_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant m}}$$

称为线性变换l的矩阵，它的列是矢量$l(\overline{i_k})$的坐标。如果$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)\in R^m$，且
$l(x)=(y_1,\ y_2,\ \cdots y_n)\in R^n$，那么

$$y_j=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{jk}x_k\ 。$$

m维矢量空间V的两个基$(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \cdots \overline{e}_m)=[\overline{e}]$和$(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_m)=[\overline{a}]$称为等价的，如果由基$[\overline{e}]$到基$[\overline{a}]$的变换矩阵的行列式(即空间V的由基$[\overline{e}]$到基$[\overline{a}]$的线

性变换的矩阵）是正的。空间V的等价基的类称为这个空间的定向。每个矢量空间仅仅存在两个定向，其中一个称为正的，另一个称为反的。这样，空间的定向的选择等价于这个空间中基的选择。

如果V是在R^3中的二维子空间，$(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ 是V的基，而$\overline{n}$是R^3的不属于V的非零矢，则$(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{n})$ 是R^3的基。如果矢量$\overline{n}$已被选定，而基 $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{n})$ 与R^3的规范基等价，则基 $(\overline{e}_1, \overline{e}_2,)$称为正的。这样，确定V的定向等价于确定矢量$\overline{n}$。通常将$\overline{n}$取为与V正交的单位矢量。

线性映射α：$R^n \to R$ 称为在矢量空间R^n上的线性形式。设$\alpha(\overline{i}_k) = \alpha_k$，那么对于矢量

$\overline{h} = (h_1, h_2, \cdots h_n)$ 有

$$\alpha(\overline{h}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k。$$

坐标函数

u_i: $R^n \to R$, $(u_1, u_2, \cdots, u_n) \mapsto u_i (i = 1 2, \cdots, n)$

是线性形式的例子。

满足下列条件的映射β：$R^n \times R^n \to R$ 称为在矢量空间R^n上的双线性形式：

$$\beta(\overline{h}_1 + \overline{h}_2, \overline{p}) = \beta(\overline{h}_1, \overline{p}) + \beta(\overline{h}_2, \overline{p})$$

$$\beta(\lambda \overline{h}, \overline{p}) = \lambda \beta(\overline{h}, \overline{p})$$

$$\beta(\overline{h}, \overline{p}_1 + \overline{p}_2) = \beta(\overline{h}, \overline{p}_1) + \beta(\overline{h}, \overline{p}_2)$$

$$\beta(\overline{h}, \lambda \overline{p}) = \lambda \beta(\overline{h}, \overline{p})。$$

如果$\beta(\overline{i}_k, \overline{i}_l) = \beta_{kl}$, $\overline{h} = (h_1, \cdots h_n)$, $\overline{p} = (p_1 \cdots, p_n)$，则

$$\beta(\overline{h}, \overline{p}) = \sum_{k,l=1}^{n} \beta_{kl} h_k p_l$$

如果$\beta(\overline{h}, \overline{p}) = \beta(\overline{p}, \overline{h})$，则称双线性形式$\beta$是对称的。如果$\beta(\overline{h}, \overline{p}) = -\beta(\overline{p}, \overline{h})$，则称双线性形式$\beta$是反对称的（或称为2－形式）。对于对称双线性形式有$\beta_{kl} = \beta_{lk}$，对于反对称双线性形式有$\beta_{kl} = -\beta_{lk}$。映射q：$R^n \to R$称为矢量空间R^n上的二次形式，如果存在双线性对称形式β，使$q(\overline{h}) = \beta(\overline{h}, \overline{h})$。在坐标下$q(h)$可用下面公式表示：

$$q(\overline{h}) = \sum_{k,l=1}^{n} \beta_{kl} h_k h_l。$$

二次形式q称为是与双线性形式β相对应的形式。设α和β是在矢量空间R^n上的两个线性形式，2－形式

$$\alpha \wedge \beta: R^n \times R^n \to R$$

称为这两形式的外积，它由下式确定：

$$(\alpha \wedge \beta)(\overline{h}, \overline{p}) = \frac{1}{2}(\alpha(\overline{h})\beta(\overline{p}) - \alpha(\overline{p})\beta(\overline{h}))$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha(\overline{h}) & \alpha(\overline{p}) \\ \beta(\overline{h}) & \beta(\overline{p}) \end{vmatrix}$$

设M是空间R^3中的任意点，偶$(M, \overline{h})$称为R^3在点M处的切矢量，这里$\overline{h}$是R^3中的任意矢量。切矢量$(M, \overline{h})$能够表示为点的这样的有序点对（M，N），使对应于点对的矢量与$\overline{h}$一致（即$M + \overline{h} = N$），而作为矢量$\overline{h}$已被放到点M处。R^3在点M处的所有切矢量的集合$T_M R^3 = \{(M, \overline{h}) | \overline{h} \in R^3\}$称为切矢量空间。对$R^3$中矢量的运算，可根据下面原则转到同一点的切矢量上：

$$(M, \overline{h}) + (M, \overline{P}) = (M, \overline{h} + \overline{P})$$
$$\alpha (M, \overline{h}) = (M, \alpha \overline{h})$$
$$(M, \overline{h}) \cdot (M, \overline{P}) = \overline{h} \cdot \overline{P}$$

关于这些运算T_MR^3是一个欧几里德矢量空间。而矢量$(M, \overline{i})$、$(M, \overline{j})$、$(M, \overline{k})$构成它的正交基。当切点M明确时，切矢量$(M, \overline{h})$能简单地用$\overline{h}$来表示。

在R^3（或它的某个子集）的每个点指定R^3的一个切矢量，就称为R^3（或R^3的某个子集）上的矢量场。

矢 函 数

设U是空间R^m的某个点集，使每个点$(u_1, u_2 \cdots u_m) \in U$映到矢量$\overline{r}(u_1, u_2, \cdots, u_m) \in R^n$的映射

$$\overline{r}: U \to R^n \qquad (2)$$

称为m个数量变量的矢函数。确定一个矢函数相当于确定n个数量函数（称为它的分量）：

$$\overline{r}(u_1, u_2, \cdots u_m) = (x_1(u_1, u_2, u_m), \cdots, x_n(u_1, \cdots u_m))。$$

设矢函数$\overline{r}$定义在点$M_0 \in R^m$的某个邻域中，或许除点M_0本身以外，此外，$\overline{a}$是某个固定的矢量，如果对于$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使

$$0 < |MM_0| < \delta \Longrightarrow |\overline{r}(M) - \overline{a}| < \varepsilon,$$

则矢量$\overline{a}$称为矢函数$\overline{r}$的极限，并记为$\overline{a} = \lim\limits_{M \to M_0} \overline{r}(M)$。

定义在点M_0的某个邻域中的矢函数(2)称为在该点是连续的，如果

$$\lim_{M \to M_0} \overline{r}(M) = \overline{r}(M_0)。$$

在一般情况下，对于任意点$M_0 \in U$，如果对点$\overline{r}(M_0)$在R^n内的任何邻域W可求得点M_0在R^m的邻域V，使$\overline{r}(V \cap U) \subset W$，则矢函数（2）称为在点$M_0$是连续的。映射$\overline{r}: U \to V$，这里U是$R^m$的子集，V是$R^n$的子集，称为同胚，如果$\overline{r}$是双射且$\overline{r}$和$\overline{r}^{-1}$均是连续的。

我们考虑定义在直线R的开集上的矢函数$\overline{r} = \overline{r}(t)$，即一个实变量t的矢函数，如果这矢函数在点t有定义，且存在极限：

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \triangle t) - \overline{r}(t_0)}{\triangle t},$$

那么称这极限为已知矢函数在点t_0的导数，并用符号$\overline{r}'(t_0)$或$\frac{d\overline{r}}{dt}(t_0)$表示。这样产生矢函数$\overline{r}'$称它为矢函数$\overline{r}$的导矢函数。$\overline{r}'$的导数称为矢函数$\overline{r}$的二阶导数，$\overline{r}^{k-1}$的导数称为矢函数$\overline{r}$的k阶导数$\overline{r}^k$。具有k阶连续导数的函数属于$C^k$级函数，具有任意阶导数的函数称为$C^\infty$级函数。通常将$C^k$级函数称为光滑的。矢函数$\overline{r} = \overline{r}(t)$的导数$\overline{r}'(t_0)$与使每个$\tau \in R$映到矢量$\tau\overline{r}'(t_0)$的线性映射$\overline{r}'(t_0): R \to R^n$能够同样看待，这个映射满足等式：

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{|\overline{r}(t_0 + \triangle t) - \overline{r}(t_0) - \triangle t\, \overline{r}'(t_0)|}{|\triangle t|} = 0。$$

通常称这个线性映射$\overline{r}'(t_0): R \to R^n$为微分，并记为

$$d\overline{r}_{t_0}=\overline{r}'(t_0)dt。$$

定义在线段 $J=[\alpha,\beta]$ 上的矢函数 $\overline{r}=\overline{r}(t)$ 称为光滑的，如果存在定义在包含线段 J 的区间 $I=]a,b[$ 上的光滑矢函数 $\overline{\rho}=\overline{\rho}(t)$，使 $\overline{\rho}|_J=\overline{r}$。

对属于 C^k 级的一个实变量的矢函数 $\overline{r}$ 有台劳公式：

$$\overline{r}(t+\Delta t)=\overline{r}(t)+\Delta t\overline{r}'(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\overline{r}''(t)$$

$$+\cdots+\frac{(\Delta t)^k}{k!}(\overline{r}^{(k)}(t)+\overline{\varepsilon}(t,\Delta t)),$$

其中 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\overline{\varepsilon}(t,\Delta t)=\overline{0}$。

现在考虑定义在变量为 u，v 的 R^2 的子集上的矢函数 (2)，这个函数在点 (u_0,v_0) 的偏导数由下列方式确定：

$$\partial_u\overline{r}(u_0,v_0)=\overline{r}_u(u_0,v_0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{r}(u_0+h,v_0)-\overline{r}(u_0,v_0)}{h}$$

$$\partial_v\overline{r}(u_0,v_0)=\overline{r}_v(u_0,v_0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{r}(u_0,v_0+h)-\overline{r}(u_0,v_0)}{h}$$

$$\partial_{uu}\overline{r}=\overline{r}_{uu}=\partial_u(\overline{r}_u),\quad \partial_{vv}\overline{r}=\overline{r}_{vv}=\partial_v(\overline{r}_v),$$

$$\partial_{uv}\overline{r}=\partial_{vu}\overline{r}=\overline{r}_{uv}=\overline{r}_{vu}=\partial_u(\overline{r}_v)=\partial_v(\overline{r}_u)。$$

矢函数 $\overline{r}$：$U\to R^n$，$(u,v)\mapsto\overline{r}(u,v)$，其中U是在 R^2 内的区域，称为在 $M_0\in R^n$ 处可微的，如果存在线性映射 l：$R^2\to R^n$，使

$$\lim_{|\overline{h}|\to 0}\frac{|\overline{r}(M_0+\overline{h})-\overline{r}(M_0)-l(\overline{h})|}{|\overline{h}|}=0。$$

在点M_0可微的矢函数在该点是连续的，而线性映射$l: R^2 \to R^n$是唯一的且称为矢函数$\overline{r}=\overline{r}(u, v)$在点$M_0$的微分(或导数)，记为$d\overline{r}_{M_0}$。微分$d\overline{r}_{M_0}$可以表示为$T_{M_0}R^2$到$T_{r(M_0)}R^n$内的映射，只需将矢量$\overline{h}\in R^2$看作为$R^2$在点$M_0$的切矢量$(M_0, \overline{h})$，而将矢量$d\overline{r}_{M_0}(\overline{h})=l(\overline{h})\in R^n$看作为$R^n$在点$\overline{r}(M_0)$的切矢量$(\overline{r}(M_0), d\overline{r}_{M_0}(\overline{h}))$。如果矢函数$\overline{\rho}=\overline{\rho}(t)$满足条件$\overline{\rho}(t_0)=M_0$，$\overline{\rho}'(t_0)=\overline{h}$，那么矢量$d\overline{r}_{M_0}(\overline{h})$与矢函数$(\overline{r}\circ\overline{\rho})$的导数$(\overline{r}\circ\overline{\rho})'(t_0)$重合。矢函数$\overline{r}=\overline{r}(u, v)$称为可微的，如果它在U的每一点可微。坐标u和v能够理解为在U上的函数，$u: (u, v)\mapsto u$，$v: (u, v)\mapsto v$。这些函数是可微的，而它们的微分du和dv与切线矢量$(M, \overline{h})$对应，其中$\overline{h}=(h_1, h_2)$，h_1和h_2为相应的数，即$du_M(\overline{h})=h_1$，$dv_M(\overline{h})=h_2$。对微分du和dv的这种表示有公式：

$$d\overline{r}=\partial_u\overline{r}\,du+\partial_v\overline{r}\,dv。$$

对于切矢量$\overline{h}=(h_1, h_2)$，

$$\begin{aligned} d\overline{r}(\overline{h}) &= \partial_u\overline{r}\,du(\overline{h})+\partial_v\overline{r}\,dv(\overline{h}) \\ &= \partial_u\overline{r}\,h_1+\partial_v\overline{r}\,h_2。\end{aligned}$$

若$\overline{r}(u, v)=(f_1(u, v), \cdots, f_n(u, v))$，且$M_0=(u_0, v_0)$，则微分$d\overline{r}_{M_0}$可用雅科比矩阵给出：

$$\begin{pmatrix} \partial_u f_1(u_0, v_0) & \partial_v f_1(u_0, v_0) \\ \partial_u f_2(u_0, v_0) & \partial_v f_2(u_0, v_0) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \partial_u f_n(u_0, v_0) & \partial_v f_n(u_0, v_0) \end{pmatrix}。$$

当线性映射由它的矩阵给出时，R^2到R^n内的线性映射空间$\mathscr{L}(R^2, R^n)$可以看作空间R^{2n}，对于可微的矢函数

$\overline{r}=\overline{r}(u, v)$可产生矢函数$d\overline{U}\to R^{2n}$。矢函数$d\overline{r}$在点M处的微分称为矢函数$\overline{r}$在点M处的二阶微分并记为$d^2\overline{r}_M$矢函数$\overline{r}=\overline{r}(u, v)$称为二次可微，如果在U的每一点都存在$d^2\overline{r}$。若$d\overline{r}$是连续的，则称$\overline{r}$为连续可微的（或为$C^1$级的）；若$d^2\overline{r}$是连续的，则为$C^2$级的。这样可逐次确定k阶微分和$C^k$级矢函数。为简便起见$C^k$级矢函数称为光滑的。线性映射

$$d^2\overline{r}_M: R^2\to\mathscr{L}(R^2, R^n), \overline{h}\mapsto d^2\overline{r}_M(\overline{h})$$

可看作为按下面规则确定的$R^2\times R^2$到R^n的双线性映射(同样可表示为$d^2\overline{r}_M$)：

$$d^2\overline{r}_M(\overline{h}, \overline{p})=d^2\overline{r}_M(\overline{h})(\overline{p})。$$

双线性映射$d^2\overline{r}_M$是对称的，而对应它的二次形式通常记为：

$$d^2\overline{r}=\partial_{uu}\overline{r}\,du^2+2\partial_{uv}\overline{r}\,du\,dv+\partial_{vv}\overline{r}\,dv^2。$$

设U、V是在R^n中的区域，映射$f: U\to V$称为C^k级微分同胚，如果f是双射且与其逆映射f^{-1}均属C^k级的。

曲 线 和 线

设I是在直线R上的区间、线段或半开集。C^k级矢函数$\overline{r}: I\to R^3$称为在空间R^3中的C^k级道路(或参数表示的曲线)，并用$(I, \overline{r})$表示。道路$(I, \overline{r})$称为：

1）简单的，如果映射$\overline{r}$是一一的；

2）正则的，如果对于所有内点$t_0\in I$有

$\overline{r}'(t_0)\neq\overline{0}$；

3）双正则的，如果对于所有内点$t_0 \in I$有

$$\overline{r}'(t_0) \nparallel \overline{r}''(t_0)。$$

两个C^k级道路$(I, \overline{r}=\overline{r}(t))$和$(J, \overline{\rho}=\overline{\rho}(s))$，其中$I$、$J$是区间，称为等价的，如果存在$C^k$级微分同胚$\lambda$：$I \to J$，使$\overline{r}(t)=\overline{\rho}(\lambda(t))$。等价道路（参数表示的曲线）类称为曲线。而这个类的每一道路称为曲线的参数表示。确定两个道路等价性的函数λ：$I \to J$称为参数变换。如果$(I, \overline{r})$是道路，则集合$\overline{r}(I) \subset R^3$称为这道路的象。构成已知曲线的所有等价的道路具有同一个象，它称为这条曲线的象。通常称曲线的象为曲线，虽然各种曲线可以有同一个象。曲线的象含在某个平面内，曲线称为平面曲线。如果曲线存在它的参数表示是简单的（正则的，双正则的），则曲线称为简单的（正则的，双正则的）。

设给出道路$\overline{r}=\overline{r}(t)$，考察所有与它等价的道路，这些道路是用具有正导数$\lambda'(t)>0$的参数变换$s=\lambda(t)$所得到的。这些道路的类称为定向曲线。曲线的参数表示$\overline{r}=\overline{r}(s)$称为自然参数表示，如果$|\overline{r}'(s)|=1$。所有的正则曲线都容许自然参数表示，通常用$s$表示的自然参数是曲线的弧长，这弧长是从某起始点计算，并按符号+或-所取的R^3的子集L称为C^k级的线（或一维流形），如果对于所有点$M \in L$，在R^3中存在该点的邻域W和C^k级的正则道路$(I, \overline{r})$，它们满足条件：

$\overline{r}(I)=W \cap L$，且$\overline{r}$：$I \to W \cap L$是同胚。道路$(I, \overline{r})$称为线L的参数表示。线L称为简单线，如果存在这样的参数表示$(I, \overline{r})$，使$\overline{r}(I)=L$。如果$(I, \overline{r})$和$(J, \overline{\rho})$是线L的两种参数表示，则道路$(I, \overline{r})$和

$(J, \overline{\rho})$ 是等价的。

如果子集L包含在某个平面内，则线L称为平面线。

设M为线L的某一点，$(I, \overline{r})$ 为L的参数表示，它使 $M=\overline{r}(t)$。过点M并使其方向矢量为矢量 $\overline{r}'(t)$ 的直线称为线L在点M处的切线。对于曲线和道路可类似地定义切线，道路 $\overline{r}=\overline{r}(s)$ 为曲线（或线）的自然参数表示，矢量 $\overline{r}''(s)$ 称为曲线(线)在点s的曲率矢量，而它的长 $|\overline{r}''(s)|$ 称为曲率，并用 $\kappa(s)$（或 κ）表示。

过点 $\overline{\rho}(t_0)$ 并使其有矢量 $\overline{\rho}'(t_0)$ 和 $\overline{\rho}''(t_0)$ 为方向矢量的平面称为双正则曲线（线）$\overline{\rho}=\overline{\rho}(t)$ 在点 t_0 的密切平面。

对于双正则曲线（线）的自然参数表示 $\overline{r}=\overline{r}(s)$ 矢量 $\overline{r}''(s)$ 与相应点的切矢量垂直。位于密切平面内半径为 $\frac{1}{\kappa(s)}$ 且中心在点 $\overline{r}(s)+\frac{1}{\kappa^2(s)}\overline{r}''(s)$ 的圆称为双正则曲线（线）在点s处的密切圆。

标准正交标架 $(\overline{r}(s);\ \overline{\alpha}(s),\ \overline{\beta}(s),\ \overline{\gamma}(s))$，其中 $\overline{\alpha}(s)=\overline{r}'(s)$，$\overline{\beta}(s)\uparrow\uparrow\overline{r}''(s)$，且矢量 $(\overline{\alpha}(s),\ \overline{\beta}(s),\ \overline{\gamma}(s))$ 构成右手系，称为定向双正则曲线（线）在点s的伏朗内标架。

曲　　面

R^3 的子集S称为 C^k 级曲面（或二维流形），如果对于所有的点 $A\in S$，在 R^3 内存在该点的邻域W和偶 (U, r)，其中U为 R^2 中的区域，$\overline{r}$：$U\to R^3$，它们满足下列条件：

1）映射$\overline{r}$：$U \to R^3$，$(u, v) \mapsto \overline{r}(u, v)$属于$C^k$级。

2）$\overline{r}(U) = W \cap S$且$\overline{r}$：$U \to W \cap S$是同胚。

3）对于所有点$(u, v) \in U$,矢量$\partial_u \overline{r}(u, v)$和$\partial_v \overline{r}(u, v)$不共线，即$d\overline{r}(u, v)$的秩$= 2$。

偶$(U, \overline{r})$称为曲面S的参数表示。参数u，v是其上的曲线坐标。曲面S称为简单曲面，如果存在它的参数表示$(U, \overline{r})$使$\overline{r}(U) = S$。

设S是R^3中的C 级曲面，如果$(U, \overline{r})$是它的参数表示，V是R^2中的区域，且λ：$V \to U$是C 级的微分同胚，则偶$(V, \overline{r} \circ \lambda)$也是S的参数表示。另一方面，如果$(U_1, \overline{r}_1)$和$(U_2, \overline{r}_2)$是曲面S的两个参数表示，且$\overline{r}_1(U_1) = \overline{r}_2(U_2)$，则映射$\lambda = \overline{r}_2^{-1} \circ \overline{r}_1$：$U_1 \to U_2$是$C^k$级的微分同胚，并称它为参数变换。映射$\overline{\rho}$：$I \to S$，其中I是直线上的区间，称为在$R^3$中的曲面S上的光滑道路（线），如果映射$\overline{\rho}$：$I \to R^3$是光滑的（相应地，如果$\overline{\rho}(I)$是在$R^3$中的线，而$(I, \overline{\rho})$是它的参数表示）。设$\overline{\rho}$：$I \to S$是在曲面S的光滑道路(线)，$(U, \overline{r})$是S的参数表示，而且$\overline{\rho}(I) \subset \overline{r}(U)$，则使$\overline{r}(u\ t) = \overline{\rho}(t)$的光滑矢函数$\mu$：$I \to U$称为道路(线)的内部表示，在此$(I, \mu)$是区域U上的道路（线）。在曲面S上的曲线称为坐标曲线，如果它的内部表示具有形式：$u = u_0 + t$，$v = v_0$或$u = u_0$，$v = v_0 + t_0$。对于在曲面S上的已知点M，R^3在点M的切矢量$\overline{h}$，称为曲面S在点M的切矢量，如果在曲面S上存在道路$(I, \overline{\rho})$使得$\overline{\rho}(t_0) = M$，$\overline{\rho}'(t_0) =$

$\overline{h}$。曲面S在点M的所有切矢量的集合是T_MR^3中的二维矢量子空间，以T_MS表示并称为曲面S在点M的切空间。如果$M=\overline{r}(u, v)$，其中$(U, \overline{r})$是S的参数表示，则矢量$\partial_u\overline{r}(u, v)$和$\partial_v\overline{r}(u, v)$（也可分别表示为$\partial_u\overline{r}_M$和$\partial_v\overline{r}_M$）是过点M的坐标曲线的切矢量，并构成切空间$T_MS$的基。基$(\partial_u\overline{r}, \partial_v\overline{r})$称为曲面S的活动基，此时$T_MS=d\overline{r}(u, v)(R^2)$。$R^3$中过点M并以$T_MS$为其方向子空间的平面称为曲面S在点M的切平面。过点M并垂直切平面的直线称为曲面S在点M的法线。将每点$M\in S$或$(M\in Q\subset S)$映到曲面S在点M的切矢量$\overline{\xi}_M$的映射称为曲面S(或子集Q)上的矢量场$\overline{\xi}$。场$\partial_u\overline{r}$和$\partial_v\overline{r}$可作为在子集$\overline{r}(U)\subset S$上的矢量场的例，其中$(U, \overline{r})$是S的参数表示，这两个矢量场称为基本矢量场。对于在曲面S上的矢量场$\overline{\xi}$、$\overline{\eta}$和函数f，矢量场的和及矢量场与函数的积的运算根据下列公式定义：

$$(\overline{\xi}+\overline{\eta})_M=\overline{\xi}_M+\overline{\eta}_M,\quad (f\overline{\xi})_M=f(M)\overline{\xi}_M,$$

这里等式右边的运算是定义在矢量空间T_MS中。如果矢量场定义在子集$\overline{r}(U)\subset S$上，则有分解式$\overline{\xi}=\xi_1\partial_u\overline{r}+\xi_2\partial_v\overline{r}$成立，其中$\xi_1$，$\xi_2$是定义在$\overline{r}(U)$上的函数。这些函数称为场$\overline{\xi}$关于活动基$(\partial_u\overline{r}, \partial_v\overline{r})$的分量。如果场$\overline{\xi}$是定义在整个曲面S上，则场$\overline{\xi}$限制在子集$\overline{r}(U)$上的分量称为场$\overline{\xi}$关于活动基$(\partial_u\overline{r}, \partial_v\overline{r})$的分量。矢量场$\overline{\xi}$称为连续的，如果它的分量关于任何活动基都是连续函数。

曲面S的定向，是在每一个切矢量空间T_MS中定向的选择，它等价于对所有$M\in S$与T_MS正交的单位矢量$\overline{n}_M$的选

择。如果在所有点上活动基是正的定向，即如果基$(\partial_u\overline{r}$，$\partial_v\overline{r}$，$\overline{n})$等价于R^3的规范基，则称曲面S的参数表示$(U,\overline{r})$是与定向一致的。如果对于S的所有点M都可求得与定向一致的参数表示$(U,\overline{r})$，使$M\in\overline{r}(U)$，则称曲面S的定向为连续定向。通常只研究连续定向。曲面连同它的连续定向称为定向曲面。

曲面S到空间R^n内的映射f：$S\to R^n$称为光滑映射，如果对这个曲面的任何参数表示$(U,\overline{r})$定义在R^2中的区域U上的矢函数$f\circ\overline{r}$：$U\to R^n$是光滑的。特别当$n=1$时，就得到在曲面上的光滑函数的定义。设Q是在R^3内的另一个曲面，考虑到Q是在R^3的子集，故映射f：$S\to Q$可看作S到R^3内的映射。映射f：$S\to Q$称为光滑的，如果它作为S到R^3内的映射是光滑的。

在曲面S上的矢量场ξ称为光滑的，如果关于任何活动基它的分量都是光滑函数。基矢量场$\partial_u\overline{r}$和$\partial_v\overline{r}$是光滑的。

设f：$S\to Q$是曲面的光滑映射，$\overline{\rho}=\overline{\rho}(t)$是在曲面S上过点$M=\overline{\rho}(t_0)$的光滑道路，则$f\circ\overline{\rho}=(f\circ\overline{\rho})(t)$是在曲面Q上过点$M'=f(M)=f\circ\overline{\rho}(t_0)$的光滑道路。将切矢量$\overline{\rho}'(t_0)$映到切矢量$(f\circ\overline{\rho})'(t_0)$的从$T_MS$到$T_{M'}Q$内的映射，称为映射$f$在点M的微分映射（或诱导映射），记为$df_M$。微分$df_M$：$T_MS\to T_{M'}Q$是线性映射。

第 一 章

矢函数. 曲线、线和曲面的概念

1.证明：矢函数$\overline{r}=\overline{r}(M)$的分量根据下面的规则求得

$$x_j(M)=\overline{i}_j\cdot\overline{r}(M)\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

其中($\overline{i}_1,\overline{i}_2,\cdots,\overline{i}_n$)是空间$R^n$的规范基。

2—6. 证明：由极限

$$\lim_{M\to M_0}\overline{r}_i(M)=\overline{a}_i\ (i=1,2,3),$$

$$\lim_{M\to M_0}f(M)=\lambda$$

的存在，可得出下列极限的存在和相应的公式：

(2) $\lim\limits_{M\to M_0}(\overline{r}_1(M)\pm\overline{r}_2(M))=\overline{a}_1\pm\overline{a}_2$。

(3) $\lim\limits_{M\to M_0}(f(M)\overline{r}_1(M))=\lambda\overline{a}_1$。

(4) $\lim\limits_{M\to M_0}(\overline{r}_1(M)\cdot\overline{r}_2(M))=\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2$。

(5) $\lim\limits_{M\to M_0}(\overline{r}_1(M)\times\overline{r}_2(M))=\overline{a}_1\times\overline{a}_2$。

(6) $\lim\limits_{M\to M_0}(\overline{r}_1(M),\overline{r}_2(M),\overline{r}_3(M))$

$$=(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3)。$$

7. 证明：矢函数的连续性与它的各个分量的连续性等价。

8. 由矢函数$\overline{r}=\overline{r}(M)$的连续性能得出函数$|\overline{r}|=|\overline{r}(M)|$的连续性吗？反过来正确吗？

9—13. 证明：若矢函数$\overline{r}_i(M)$和函数$f(M)$在点M_0连续，则下列函数在这点也连续：

(9) $\overline{r}_1(M)\pm\overline{r}_2(M)$。

(10) $f(M)\cdot\overline{r}(M)$。

(11) $\overline{r}_1(M)\cdot\overline{r}_2(M)$。

(12) $\overline{r}_1(M)\times\overline{r}_2(M)$。

(20) $(\overline{r}_1(M),\overline{r}_2(M),\overline{r}_3(M))$。

14. 证明：矢函数的光滑性与它的各个分量的光滑性等价。

15. 证明：$\overline{r}^{(k)}(t)=(x_1^{(k)}(t),x_2^{(k)}(t),\cdots x_n^{(k)}(t))$

16—20. 证明：对于C^1级矢函数$\overline{r}_i$：$I\to R^3$和函数f：$I\to R$，下列公式成立：

(16) $(\overline{r}_1\pm\overline{r}_2)'=\overline{r}_1'\pm\overline{r}_2'$。

(17) $(f\overline{r})'=f'\overline{r}+f\overline{r}'$。

(18) $(\overline{r}_1\cdot\overline{r}_2)'=\overline{r}_1'\cdot\overline{r}_2+\overline{r}_1\cdot\overline{r}_2'$。

(19) $(\overline{r}_1\times\overline{r}_2)'=\overline{r}_1'\times\overline{r}_2+\overline{r}_1\times\overline{r}_2'$。

(20) $(\overline{r}_1,\overline{r}_2,\overline{r}_3)'=(\overline{r}_1',\overline{r}_2,\overline{r}_3)+(\overline{r}_1,\overline{r}_2',\overline{r}_3)+(\overline{r}_1,\overline{r}_2,\overline{r}_3')$。

21—26. 求下列一个实变量t的函数的导数：

(21) $\overline{r}^2$。　(22) $\overline{r}'^2$。　(23) $\overline{r}'\times\overline{r}''$。

(24) $(\overline{r}',\overline{r}'',\overline{r}''')$。　(25) $(\overline{r}'\times\overline{r}'')\times\overline{r}'''$。

(26) $\sqrt{\overline{r}^2}$。

27. 证明椭圆切线的平分线性质：椭圆在它任意点M的

切线是切点的两焦半径夹角的角平分线。

28. 对于矢函数：$\overline{r}(t)=(t^2+8, 4t-7, t+5)$，求$t_0$值，使线性映射$\overline{r}'(t_0)$将数2映成矢量（4，8，2）。

29. 由矢函数$\overline{r}=\overline{r}(t)$的光滑性能得到函数$|\overline{r}|=|\overline{r}(t)|$的光滑性吗?

30. 对于函数$\overline{r}(t)$能判定下列等式成立吗?

1) $|\overline{r}'|=|\overline{r}|'$?　2) $\overline{r}\cdot\overline{r}'=|\overline{r}||\overline{r}'|$?

31. 证明：欲使矢函数$\overline{r}=\overline{r}(t)$在某个区间具有零导数的充要条件是矢量$\overline{r}(t)$是个常矢，即与$t$无关。

32. 证明：欲使矢函数$\overline{r}(t)$和$\overline{r}'(t)$在某个区间的所有点上正交的充要条件是$|\overline{r}(t)|=$常数。

33. 设$\overline{r}=\overline{r}(t)$是$C^1$级的矢函数，$\overline{r}(t)\neq\overline{0}$，欲使矢量$\overline{r}(t)$具有固定方向，其充要条件是在$t$的变化区间内矢量$\overline{r}(t)$和$\overline{r}'(t)$共线。试证之。

34. 设C^3级的矢函数$\overline{r}=\overline{r}(t)$在它的定义域上所有点都满足关系式：

$$(\overline{r}'(t), \overline{r}''(t), \overline{r}(t)''') = 0,$$

$$\overline{r}'(t)\times\overline{r}''(t)\neq\overline{0}。$$

证明，由矢函数$\overline{r}=\overline{r}(t)$确定的曲线是平面曲线。

35. 设对定义在区间$]a, b[$上的C^2级矢函数$\overline{r}=\overline{r}(t)$导数$\overline{r}'(t)$和$\overline{r}''(t)$在所有$t\in]a, b[$均不为零且共线。证明，矢函数$\overline{r}=\overline{r}(t)$确定的曲线的象是直线段。

36. 如果矢量$\overline{r}_1$和$\overline{r}_2$不共线，证明，由矢函数
$\overline{r}=\overline{r}_0+t\overline{r}_1+t^2\overline{r}_2$（$t\in R$，其中$\overline{r}_0$，$\overline{r}_1$，$\overline{r}_2$是常矢）

给出的曲线的象是抛物线。在矢量$\overline{r}_1$和$\overline{r}_2$共线的情况下曲线象是什么？

37. 如果矢量$\overline{r}_1$和$\overline{r}_2$不共线，证明，由矢函数
$\overline{r}=\overline{r}_0+\cos t\,\overline{r}_1+\sin t\,\overline{r}_2$，$t\in[0, 2\pi]$，给出的曲线的象是椭圆。在矢量$\overline{r}_1$和$\overline{r}_2$共线的情况下，曲线象是什么？

38. 如果矢量$\overline{r}_1$和$\overline{r}_2$不共线，证明：由矢函数
$\overline{r}=\overline{r}_0+\mathrm{ch}\,t\,\overline{r}_1+\mathrm{sh}\,t\,\overline{r}_2$，$t\in R$，给出的曲线的象是双曲线的一支。在矢量$\overline{r}_1$和$\overline{r}_2$共线的情况下，曲线象是什么？

39. 证明：在中心力作用下质点运动的轨迹是平面曲线。

40. 证明：两个光滑的参数表示的曲线$\overline{r}(t)=(t, 0, 0)$和$\overline{r}_1(t)=(t^3, 0, 0)$不等价，尽管这两个曲线中每一个的象都是直线。

41. 证明：下列平面图形都是线，并指出它们的任一参数表示：

1)直线，2)圆，3)椭圆，4)抛物线，5)双曲线。

42. 证明：圆S^1不可能有线的定义意义下的参数表示$(I, \overline{r})$使$\overline{r}(I)=S^1$。

43. 证明：所有正则曲线$(I; \overline{r})$局部地都是简单曲线，即对于任何$t_0\in I$都存在区间$J\subset I$，使$t_0\in J$，且$(J, \overline{r}|)$是简单曲线。

44. 证明：正则曲线的象局部是线。

45. 证明：所有正则曲线恰好可确定两个有向曲线。

46. 证明：欲使矢函数$\overline{r}=\overline{r}(u, v)$在某个区域内偏

导数为零或微分为零，其充要条件是矢量$\overline{r}(u,v)$是常矢。

47. 证明：欲使矢量$\overline{r}(u,v)$在参数u和v变化的某个区间内的每一点上同矢量$\partial_u\overline{r}(u,v)$和$\partial_v\overline{r}(u,v)$都正交的充要条件是$|\overline{r}(u,v)|=$常数。

48. 设$\overline{r}=\overline{r}(u,v)$是$C^1$级的矢函数，证明：欲使矢量$\overline{r}(u,v)$有固定方向的充要条件是在参数u、v变化区域内矢量$\overline{r}(u,v)$与矢量$\partial_u\overline{r}(u,v)$和$\partial_v\overline{r}(u,v)$共线。

49. 证明：欲使满足条件$\partial_v\overline{r}\nparallel\partial_u\overline{r}$的光滑矢函数$\overline{r}=\overline{r}(u,v)$的象含于某个平面的充要条件是矢量$\partial_v\overline{r}$和$\partial_u\overline{r}$平行于这个平面。

50—53. 设$\overline{r}_0$、$\overline{r}_1$、$\overline{r}_2$、$\overline{r}_3$是常矢，且矢量$\overline{r}_1$、$\overline{r}_2$、$\overline{r}_3$均不共面，求下列矢函数的象：

(50) $\overline{r}=\overline{r}_0+u\overline{r}_1+u^2\overline{r}_2+v\overline{r}_3$。

(51) $\overline{r}=\overline{r}_0+\cos u\,\overline{r}_1+\sin u\,\overline{r}_2+v\overline{r}_3$。

(52) $\overline{r}=\overline{r}_0+\left(u+\frac{1}{u}\right)\overline{r}_1+\left(u-\frac{1}{u}\right)\overline{r}_2+v\overline{r}_3$。

(53) $\overline{r}=\overline{r}_0+u\cos v\,\overline{r}_1+u\sin v\,\overline{r}_2+u^2\overline{r}_3$。

54. 证明：平面是简单曲面。写出它的任意两个参数表示。

55—63. 证明：下列图形是在R^3内的曲面，并建立它们的参数表示：

(55) 球面， (56) 椭圆面， (57) 椭圆抛物面

(58) 单叶双曲面， (59) 双叶双曲面，

(60) 椭圆柱面， (61) 抛物柱面，

(64) 双曲柱面， (63) 不包含顶点的锥面

64. 设U是R^2内的区域，$f: U \to R$是C^k级的函数，证明，函数f的图形，即集合

$S = \{(x, y, z) \in R^3 | (x, y) \in U, Z = f(x, y)\}$，

是C^k级的简单曲面，而矢函数$\overline{r}(u,v) = \{u, v, f(u,v)\}$是它的参数表示。

65. 证明：所有的曲面S局部地都是某个函数的图形，即对于任何点$M \in S$都可找到这个点在R^3内的邻域W，使$S \cap W$是某个函数的图形。

66. 设$\overline{r}: V \to R^3$，其中V是R^2内的区域，且对于V的所有点有$\partial_u \overline{r} \nparallel \partial_v \overline{r}$。1)集合$\overline{r}(V)$是曲面吗？2)证明：对于任何点$(u, v) \in V$，存在$R^2$内的区域$U$，使$(u, v) \in U \subset V$，$\overline{r}(U)$是$C^1$级的曲面。

67. 设矢函数$\overline{r}(u, v) = (u, v, 0)$，其中$(u, v) \in R^2 \setminus \{(u, v) | v = 0, u \geqslant 0\}$是曲面$S$的参数表示。1)确定曲面$S$的形式，2)求一个区域，使在这个区域上矢函数$\overline{\rho}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$是曲面$S$的参数表示；3)建立上述参数表示间的变换。

第二章　平面曲线

§1. 确定曲线的各种方法

如果有矢函数$\overline{r}$：$I\to R^2$，$t\to\overline{r}(t)$是线或曲线的参数表示，则等式

$$\overline{r}=\overline{r}(t) \qquad (1)$$

称为线（曲线）的矢量方程。若$x(t)$，$y(t)$是矢函数(1)关于R^2中笛卡尔直角坐标系的分量，则方程（1）相当于两个参数方程：

$$x=x(t),\quad y=y(t)。\qquad (2)$$

线（曲线）的显式表示

$$y=f(x) \qquad (3)$$

是参数表示（2）的特殊情况。

线（曲线的象）也能借助方程

$$F(x,\ y)=0 \qquad (4)$$

给出，它称为隐式表示。

可以用极坐标代替笛卡尔直角坐标。

68. 写出由所有到两个已知点F_1和F_2（$|F_1F_2|=2b$）的距离之积是常数a^2的点组成的平面图形的方程（卡西尼卵形线），这些图形中哪些是线，哪些能是曲线的象？

69. 已知具有长为$2a$的直径OA的圆和它在点A的切

线，经过点O作射线OC，在OC上截取线段OM，使OM等于射线在圆和切线AB之间所夹的线段BC，当射线OC绕O点旋转时点M运动的轨迹称为基阿克列斯蔓叶线，列出这个轨迹方程。基阿克列斯蔓叶线是线吗？

70。任一射线分别交圆

$$x^2+(y-\frac{a^2}{2})=\frac{a^2}{4}$$

和圆的切线于D和E，此切线过O的对径点C，过D和E分别作平行轴Ox和Oy的直线交于点M，求点M形成的曲线方程（安尼基箕舌线）。

71。点M沿着直线ON匀速运动，直线ON绕点O作匀速旋转，列出点M的轨迹方程（阿基米德螺线）。

72。直线OL绕O点以固定的角速度ω旋转，点M沿直线OL以与距离｜OM｜成比例的速度运动，列出点M描述的曲线方程（对数螺线）。

73。定长2a的线段AB其终点沿直角坐标系xOy的坐标轴滑动，从坐标原点作直线AB的垂线OM，列出点M形成的图形的方程（四叶玫瑰线），这个图形是线吗？它能是曲线的象吗？

74。一射线绕着半径为a的圆上某点O旋转，此时从它与圆的交点A向两侧截取长为2b的线段AM_1，AM_2，列出点M_1和M_2描述的图形的方程（巴斯卡蚶牛线，其中在a＝b时为心脏线）。任一巴斯卡蚶线是线吗？

75。直线x＝a交Ox轴于点A，而任一射线OB交直线于B，在射线上从B点向两侧截取线段BM_1和BM_2，使其等于线段AB，写出所有点M_1和M_2形成的图形Φ的方程（环

索线），图形Φ和Φ＼A是线吗？这些图形能是曲线的象吗？

76．过由极坐标给出的点E（a，$\frac{\pi}{2}$）作平行极轴的直线，任一射线OK交这直线于点K，在射线上从点K向两侧截取长为l的等长线段KM_1和KM_2，写出所有点M_1和M_2组成的图形方程（尼哥明达蚌线），尼哥明达蚌线是线吗？它能是曲线的象吗？

77．长为a的线段AB其端点沿直角坐标系的坐标轴滑动，分别平行坐标轴的直线AC和BC交于点C，从C作直线AB的垂线CM，写出M点组成的图形方程（星形线），星形线是线吗？

78．写出圆的渐伸线的参数方程，即从固定的圆形平面线圈上松卷时拉紧的线的端点轨迹。

79．半径为a的圆沿直线作无滑动的滚动，列出与圆联成刚体并离圆心距离为d的点M的轨迹方程（在$d=a$时为摆线，$d<a$时为缩短摆线，$d>a$时为伸长摆线）。

80．半径为r的圆沿半径为R的圆的外侧作无滑动的滚动，列出滚动圆的点M的轨迹方程（外摆线），在$r=R$时情况如何？

81．半径为r的圆沿半径为R的圆的内侧作无滑动的滚动，写出滚动圆的点M的轨迹方程（内摆线）。在$R=4r$，$R=2r$时，情况如何？

82．已知曲线$x=t^3-2t$，$y=t^2-2$。

点M（-1，-1）、N（4，2），P（1，2）在它的象上吗？求曲线的象与坐标轴的交点，写出曲线象的隐式方程。

83。求圆 $x^2+y^2-2ax=0$ 的参数表示,采用参数:

1)过坐标原点和圆上点的直线的斜率;

2)Ox 轴与过圆上的点和圆心的直线的夹角。

84—91,作出下列曲线的象

(84) $x=t^2-t+1$, $y=t^2+t+1$。

(85) $x=t^2-2t+3$, $y=t^2-2t+1$。

(86) $x=a\sin^2 t$, $y=b\cos^2 t$。

(87) $x=\dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}$。

(88) $x=3^t+3^{-t}$, $y=3^t-3^{-t}$。

(89) $x=\dfrac{a-t}{a+t}$, $y=\dfrac{t}{a+t}$。

(90) $x=a\ln t$, $y=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$。

(91) $x=a+R\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y=b+R\dfrac{2t}{1+t^2}$。

92。双曲线的参数表示能取为

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)。$$

当参数 t 由 $-\infty$ 增大到 $+\infty$ 时,点沿着双曲线怎样运动?需要作怎样的参数变换可使双曲线的右边分支的参数表示为

$$x=a\,\mathrm{Ch}\,\varphi,\quad y=b\,\mathrm{Sh}\,\varphi?$$

93。证明:方程

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta$$

和 $$x=a\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=b\frac{2t}{1+t^2}$$

是同一曲线的参数表示,作出这个曲线的图形,当参数 t 由

$-\infty$增大到$+\infty$时，点沿曲线怎样运动？

94—104. 指出在极坐标下下列方程给出的是怎样的曲线：

(94) $r = 4$。

(95) $r = 2a\cos\varphi$。

(96) $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$。

(97) $r = \dfrac{b}{\sin\varphi}$。

(98) $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$。

(99) $r = \dfrac{16}{3 - 5\cos\varphi}$

(100) $r = \dfrac{2}{1 - \cos\varphi}$。

(101) $r^2\cos 2\varphi = a^2$。

(102) $r = b\sin\varphi$。

(103) $r = \sec^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$。

(104) $r = \operatorname{cosec}^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$。

105. 具有参数表示$\overline{r}(t) = (x(t), y(t))$的曲线，其中$x(t)$和$y(t)$是参数$t$的有理函数，称为有理曲线。证明如果它的象能由形式为

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) = 0$$

的方程给出，则曲线是有理曲线，其中$\varphi_p(x, y)$是p次的齐次多项式。

106—110。证明：用下面的方程给出的图形是有理曲线

的象，并求相应的参数表示：

(106) $x^2+y^2-2ax=0$。

(107) $x^3+y^3-3axy=0$。

(108) $(x^2+y^2)x-2ay^2=0$。

(109) $r=a(1+\cos\varphi)$。

(110) $(x^2+y^2)x+a^2(x^2-y^2)=0$。

§2. 切触。切线和法线

由§1的方程（1）—（4）给出的曲线的切线方程分别具有相应的形式

$$\overline{\rho}=\overline{r}+\lambda\overline{r}',$$

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'},$$

$$Y-y=f'(x)(X-x),$$

$$(X-x)F_x+(Y-y)F_y=0,$$

其中X、Y是切线上点的流动坐标，$\overline{\rho}$是该点的径矢，x，y是切点坐标。法线方程分别相应为：

$$(\overline{\rho}-\overline{r})\cdot\overline{r}'=0,$$

$$(X-x)x'+(Y-y)y'=0,$$

$$X-x+(Y-y)f'(x)=0,$$

$$\frac{X-x}{F_x}=\frac{Y-y}{F_y}。$$

如果对具有公共点M_0的两条曲线存在这样的自然参数表示$\overline{r}_1=\overline{r}_1(s)$，$\overline{r}_2=\overline{r}_2(s)$，使$\overline{r}_1(s_0)=\overline{r}_2(s_0)=M_0$，且

$$\lim_{\triangle s\to 0}\frac{|\overline{r}_1(s_0+\triangle s)-\overline{r}_2(s_0+\triangle s)|}{(\triangle s)^k}=0,$$

k是满足这个条件的最大数，则称这两曲线在该点具有k阶切触。两曲线在公共点M^0具有k阶切触的充要条件是，存在它们的自然参数表示$\overline{r}_1=\overline{r}_1(s)$，$\overline{r}_2=\overline{r}_2(s)$，使$\overline{r}_1(s_0)=\overline{r}_2(s_0)=M_0$，且在$s=s_0$处

$$\frac{d\overline{r}_1}{ds}=\frac{d\overline{r}_2}{ds},\ \cdots,\ \frac{d^k\overline{r}_1}{ds^k}=\frac{d^k\overline{r}_2}{ds},$$

$$\frac{d^{k+1}\overline{r}_1}{ds^{k+1}}\neq\frac{d^{k+1}\overline{r}_2}{ds^{k+1}}。$$

如果对于具有公共点M_0的两曲线存在这样的参数表示$\overline{r}_1=\overline{r}_1(t)$，$\overline{r}_2=\overline{r}(t)$，使$\overline{r}_1(t_0)=\overline{r}_2(t_0)=M_0$，且在$t=t_0$处

$$\frac{d\overline{r}_1}{dt}=\frac{d\overline{r}_2}{dt},\ \cdots,\ \frac{d^k\overline{r}_1}{dt^k}=\frac{d^k\overline{r}_2}{dt^k}$$

$$\frac{d^{k+1}\overline{r}_1}{dt^{k+1}}\neq\frac{d^{k+1}\overline{r}_2}{dt^{k+1}},$$

则这两曲线在点M_0有k阶切触。

假设一条曲线给出参数表示$x=x(t)$，$y=y(t)$而第二条曲线给出隐方程式：

$F(x, y)=0$，如果在属于两曲线的某个点上满足关系式

$$F(x(t), y(t))=0,\ \frac{dF}{dt}=0,\ \cdots,$$

$$\frac{d^kF}{dt^k}=0,\quad \frac{d^{k+1}F}{dt^{k+1}}\neq 0,$$

则这两曲线在该点有k阶切触。

111—127．建立下列曲线的切线和法线方程：

(111) $y=x^2+4x+3$ 在分别具有横坐标 -1，0，1 的点A、B、C处。

(112) $y=x^3$ 在分别具有横坐标 0 和 1 的点A、B处。

(113) $y=\sin x$ 在分别具有横坐标 0、$\frac{\pi}{2}$、π 的点处。

(114) $y=\operatorname{tg}x$ 在分别具有横坐标 0、$\frac{\pi}{4}$ 的点处。

(115) $x=t^3-2t,\ y=t^2+1$ 在点A$(t=1)$处。

(116) $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$．

(117) $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$．

(118) $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$．

(119) $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$．

(120) $x^3+y^3-3axy=0$ 在点A $\left(\frac{3a}{2},\ \frac{3a}{2}\right)$ 处。

(121) $(x^2+y^2)x-ay^2=0$ 在点A $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$ 处。

(122) $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=C$．

(123) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．

(124) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$．

(125) $y^2=2px$．

(126) $r=a\varphi$．

(127) $r=2a\cos\varphi$ 在 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 的A点处。

128. 抛物线$y=x^2$在什么点上其切线与Ox轴夹角为$45°$？

129. 曲线$y=x^3$是否存在某个点其切线对Ox轴的倾角为$\frac{3\pi}{4}$？

130. 证明曲线$y=x^5+2x^3+x-1$在任意点的切线对Ox轴的倾角在$\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$内。

131. 求抛物线$y=x^2$的与直线$y=4x-5$平行的切线。

132. 抛物线$y=x^2-6x+5$在什么点的切线垂直于直线$x-2y+8=0$？

133. 在抛物线方程$y=x^2+bx+c$中选择常数b和c，使抛物线与直线$y=3x-5$相切于横坐标$x=2$的点。

134. 在具有同一横坐标（不为零）的什么点上曲线$y=x^2$，$y=x^3$的切线平行？

135. 证明：曲线$y=x^n$（n为正整数）只有一条法线过坐标原点。

136. 求曲线$x=t^2-1$，$y=t^3+1$的平行于直线$2x-y+3=0$的切线。

137. 求曲线$x=t^3$，$y=t^2$的经过点$M(-7,-1)$的切线。

138. 证明：曲线$y=a\sin\left(\frac{x}{a}\right)$，$y=a\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{a}\right)$，$y=a\ln\left(\frac{x}{a}\right)$与$Ox$轴的交角与数a无关。

139. 求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$的离坐标原点最远的切线。

140. 证明：对于等边双曲线$x^2-y^2=a^2$的任何点M，法线从点M到与Ox轴的交点的线段等于线段OM。

141. 证明：圆的渐伸线$x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$的所有法线离坐标原点一样远。

142. 证明：如果平面曲线的所有法线过一定点，则曲线是圆或圆的一部分。

143—146. 求下列曲线的交点和交角：

(143) $y^2=4x$，$x^2=4y$。

(144) $x^2+y^2=9$，$x^2+y^2-6x=9$。

(145) $x^2+y^2+2x=7$，$y^2=4x$。

(146) $y=\sin x$，$y=\cos x$。

147—149. 证明下列曲线相交成直角：

(147) $y=x-x^2$，$y=x^2-x$。

(148) $y^2=2ax+a^2$，$y^2=-2bx+b^2$。

(149) $x^2-y^2=a$，$xy=b$。

150. 证明：曲线$\overline{r}=\overline{r}(\varphi)$的切线与在切点的径矢的夹角的正切由下面公式给出：

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{r}{dr/d\varphi}。$$

151. 证明：心脏线在任意点的切线和径矢之间的夹角等于极角的一半。

152. 证明：心脏线$r=2a(1-\cos\varphi)$在过极点的弦的两端点所作的切线互相垂直。

153. 证明：阿基米德螺线$r=a\varphi$的切线和由极点所

引的切点的径矢之间的夹角在$\varphi\to\infty$时趋向于90°。

154。证明：对数螺线$r=ca^{\varphi}$，$a>0$，在任意点的切线与切点径矢的夹角μ是常数。

155。证明：仅有对数螺线和圆具有上题所指出的性质。

156。证明：贝努利双纽线$r^2=2a^2\cos 2\varphi$在任意点的切线与切点径矢的夹角μ等于$2\varphi+\frac{\pi}{2}$，其中φ是切点的极角。在这个性质的基础上指出双纽线在任意点的切线和法线的作法。

157。设在极坐标系中给出曲线$r=r(\varphi)$和$r_1=r_1(\varphi)$，证明：如果$rr_1+r'r_1'=0$，则它们相交成直角。

158—159. 证明下列曲线交成直角：

(158) $r=ae^{\varphi}$，$r=be^{-\varphi}$。

(159) $r=a(1+\cos\varphi)$，$r=a(1-\cos\varphi)$。

160。设曲线$y=y(x)$在M点的切线交Ox轴于点T，而法线交Ox轴于点N，并设P是M点在Ox轴上的投影。证明：切线MT，法线MN，次切距PT和次法距PN的长度可用下列公式表示：

$$|MT|=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}$$

$$|MN|=|y|\sqrt{1+y'^2}$$

$$|PT|=\left|\frac{y}{y'}\right|$$

$$|PN|=|yy'|$$

161—162。求下列曲线的切线、次切距、法线和次法距的长度：

(161) $y=\operatorname{tg}x$ 在横坐标为 $\frac{\pi}{4}$ 的M点处。

(162) $y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$在任意点处。

163。求曲线，使该曲线的次法距为定长且等于k。

164。求一曲线，使该曲线的次切距为定长且等于k。

165。证明：圆心在Ox轴上的圆是法线长度为定长的唯一曲线。

166。求切线长度为定长a的曲线。

167。证明：曳物线（见166题的答案）与横轴间所围的面积是有限的。

168。设曲线 $\overline{r}=\overline{r}(\varphi)$在M点的切线与过极点并垂直于切点径矢的直线交于点T，而法线交这直线于点N。证明，极切线MT，极法线MN、极次切距OT和极次法距ON的长可分别用下列公式表示：

$$|MT|=\left|\frac{r}{r'}\right|\sqrt{r^{2}+r'^{2}},$$

$$|MN|=\sqrt{r^{2}+r'^{2}},$$

$$|OT|=\frac{r^{2}}{|r'|},\quad |ON|=|r'|。$$

169。求曲线，使其极次切距为定长k。

170。求曲线，使其极次法距为定长。

171。求曲线，使其极法线为定长k。

172。证明：星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的切线在两坐标

轴之间所夹的线段长度为a。

173. 证明：贝努利双纽线$r^2=2a^2\cos2\varphi$在过极坐标系极点的弦的两个端点处的切线平行。

174. 证明：星形线每条切线交星形线于两个点，在该两点的切线相交在星形线的外接圆周上。

175. 证明：两曲线在公共点的切触阶不低于1的充要条件是两曲线在公共点上有公共切线。

176. 证明：曲线$y=e^{kx}\sin mx$与曲线$y=e^{kx}$和$y=e^{-kx}$都相切。

177—178. 求下列曲线在坐标原点的切触阶：

(177) $y=\sin x$，$y=\operatorname{tg} x$。

(178) $y=x^3$，$y=x\sin x$。

179. 证明：曲线

$$y=\sin x,\quad y=x^4-\frac{1}{6}x^3+x$$

在坐标原点具有三阶切触。

180. 说明：曲线$x^2+y^2-6x-6y+10=0$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}-2=0$（$x>0$，$y>0$）在点$A(1,1)$具有怎样的切触阶。

181. 求与圆$x^2+y^2=2$相切于点$M(1,1)$的形式为$y=x^2+ax+b$的抛物线方程。

182. 求与抛物线$y=x^2$在坐标原点有二阶切触的圆方程。

183. 求与曲线$y=\ln x$在点$M(1,0)$具有最高阶切触的抛物线方程。

184. 求与曲线$y=f(x)$在点$A(0,f(0))$有n阶切

触的曲线 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$。

185。求下列方程：1）椭圆，2）双曲线，3）抛物线，它们的顶点与旋轮线 $x = R(t - \sin t)$，$y = R(1 - \cos t)$ 的顶点A（πR，$2R$）重合，并与旋轮线有最高阶切触。

§3。渐近线。奇异点。线（曲线）的讨论和作图

如果线（曲线）

$$x = x(t),\quad y = y(t) \qquad (1)$$

在 $t \to t_0$ 时有渐近线，它的方程为 $y = kX + b$，则

$$k = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)},\quad b = \lim_{t \to t_0} (y(t) - kx(t))。$$

如果线（曲线）(1)在 $t \to t_0$ 时有竖的渐近线，则渐近线的方程为 $x = a$，其中

$$a = \lim_{t \to t_0} x(t),\quad \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty。$$

设曲线由参数表示 $\overline{r} = \overline{r}(t)$ 给出，$M = \overline{r}(t_0)$ 是曲线上使 $\overline{r}'(t_0) = \overline{0}$ 的点，则称点M为非正则点。

设 $\overline{r}^{(p)}(t_0)$ 是第一个不为零的导数，而 $\overline{r}^{(q)}(t_0)$ 是第一个与矢量 $\overline{r}^{(p)}(t_0)$ 不共线的导数。那么可能有下列几种情况：

1） p是奇数， q是偶数；

2） p是奇数， q是奇数；

3） p 是偶数， q 是奇数；

4） p 是偶数， q 是偶数。

在第一种情况下，在M点的邻域内曲线的象具有在正则点的邻域内那样的形式。在第二种情况下点M是拐点。在第三种情况，称点M为第一种尖点，在它的邻域里曲线如图 1 所示。在第四种情况，称点M为第二种尖点，在它的邻域里曲线具有如图 2 的形式。

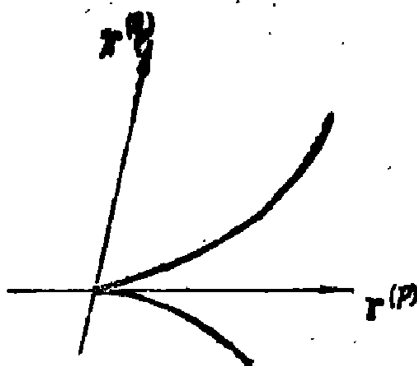


图 1

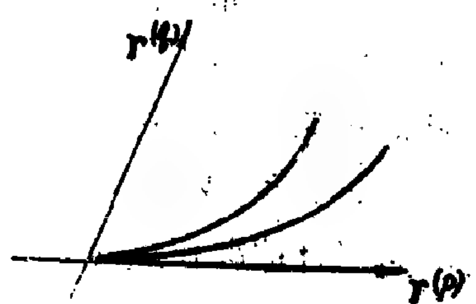


图 2

设由方程

$$F(x,\ y)=0, \tag{2}$$

其中F是连续函数，给出的平面图形L具有性质：

1）图形L上存在点$M_1\cdots$，M_k，使图形$L_1=L\setminus\{M_1,\cdots,M_k\}$是线。

2）图形$L_1 \cup \{Mi\}$（$i=1,2,\cdots,k$）的任何一个都不是线。

那么称图形L为具有奇异点$M_1,M_2,\cdots$，M_k的线。只有使$F_x(x,\ y)=0$，$F_y(x,y)=0$的点才可能是奇异点。

如果在线的奇异点上函数F（x，y）的二阶偏导数中至少有一个不等于零，则称线（2）的该奇异点为二重奇异点。

如果属于线（2）的简单线过二重奇异点M，且在该点$F_{yy}\neq 0$，那么此简单线的切线的斜率k可以从方程$F_{xx}+2F_{xy}k+F_{yy}k^2=0$求出。

如果在二重奇异点上条件$F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}>0$成立，则在该点邻域内能分出通过它的两条简单曲线，这个点称为自交点。如果在点M有$F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}<0$，则在它的某个邻域内除该点本身外，不存在满足方程（2）的其它点，这个点称为孤立点。如果在点M有$F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=0$那么此点可能是第一种尖点或第二种尖点或自切点。最后一种情况在点的某个邻域内线具有如图3所示的形式。

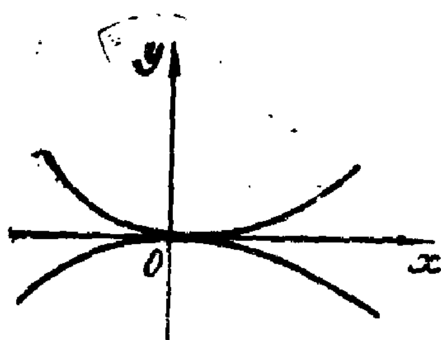


图 3

曲线的讨论就是要弄清楚线所有最重要的性质，这些性质使有可能足够精确地来作出线。奇异点，拐点、渐近线、自交点、切线平行坐标轴的点以及曲线与坐标轴的交点是否在在均属于最重要的性质。

186—191. 求下列由显方程给出的线的渐近线：

(186) $y=\dfrac{2}{x-3}$。　　(187) $y=\dfrac{5}{x^2-16}$。

(188) $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$。　　(189) $y=\dfrac{x^2-4x+7}{x}$。

(190) $y=\frac{x^2}{x+2}$。　　(191) $y=\frac{x^3+1}{x}$。

192—194. 求下列由参数方程给出的曲线的渐近线：

(192) $x=\frac{2t}{(t-1)(t-2)}$, $y=\frac{t^2}{(t-1)(t-3)}$。

(193) $x=\frac{2t-1}{t^2-1}$, $y=\frac{t^2}{t-1}$。

(194) $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$。

195—197. 求下列由隐方程给出的线的渐近线：

(195) $xy^2-y^2-4x=0$。

(196) $xy^2=x^2+2x-\frac{5}{4}$。

(197) $(x^2-y^2)(x-y)=1$。

198—199. 求由极坐标下的方程给出的曲线的渐近线：

(198) $r=\frac{a}{\sin\varphi}+1$ (尼哥明达蚌线)。

(199) $r=\frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ (基阿克列斯蔓叶线)。

200—204. 求由下列方程给出的线的奇异点：

(200) $y^2=x^3+x^2$。　　(201) $x^2=y^2+x^4$。

(202) $y^2=x^3-x^2$。　　(203) $x^2y^2=x^2+y^2$。

(204) $4y^2=x^5+5x^4$。

205—209. 求下列线的奇异点，并写出这些线在奇异点的切线方程：

(205) $(x^2+y^2)x-2ay^2=0$ (基阿克列斯蔓叶线)。

(206) $(x^2+y^2)(y-a)^2-l^2y^2=0$ (尼哥明达

蚌线）。

(207) $(2a-x)y^2=x(x-a)^2$ (环索线)。

(208) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$(贝努利双纽线)。

(209) $(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$ (心脏线)。

210—212。下列线在所给点的切线和法线存在吗?

(210) $y=x\sin(\frac{1}{x})$ 在点 $x=0$。

(211) $y=x\ (1+e^{\frac{1}{x}})^{-1}$在点 $x=0$。

(212) $y=(1+e^{\frac{1}{x-1}})^{-1}$在点 $x=1$。

213。证明：由方程 $F(x,y)=0$ 给出的线其拐点的坐标满足方程

$$F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2=0。$$

214。由极坐标方程 $r=r(\varphi)$给出曲线，求确定曲线拐点的方程。

215—222。讨论并绘出由下列显式方程给出的线：

(215) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$。 (216) $y=\frac{x^3}{x^2-3}$。

(217) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$。 (218) $y=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$。

(219) $y=\sqrt{\frac{125-x^3}{3x}}$。 (220) $y=\frac{\ln x}{x}$。

(221) $y=e^{-x^2}$。 (222) $y=e^{\frac{1}{x}}$。

223—238。讨论并作出由下列参数方程给出的曲线的象：

(223) $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ (笛卡尔叶形线)。

(224) $x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t(1-t)}{1+t^2}$。

(225) $x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t^3}{1+t^2}$。

(226) $x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$。

(227) $x=t^2$, $y=\frac{2}{3}t(3-t^2)$。

(228) $x=\frac{t^2}{1-t}$, $y=\frac{t^3}{1-t^2}$。

(229) $x=\frac{t^2}{1-t^2}$, $y=\frac{t^3}{1-t^2}$。

(230) $x=4t^2$, $y=3t(t^2+1)$。

(231) $x=t^4$, $y=t^2-t^6$。

(232) $x=\frac{t^5}{10(1-t)}$, $y=t^3$。

(233) $x=\frac{t}{1-t^2}$, $y=\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$。

(234) $x=t^2$, $y=t^4+t^6$。

(235) $x=\frac{5t^2}{1+t^5}$, $y=\frac{5t^3}{1+t^5}$。

(236) $x=\frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y=\frac{(t-2)^2}{t-1}$。

(237) $x=\frac{4t}{1-t^4}$, $y=\frac{4t^2}{1-t^4}$。

(238) $x=2\sin t$, $y=\frac{2\cos^2 t}{2+\cos t}$。

239—274. 讨论并绘出由下列方程给出的线（具有奇异点）：

(239) $x^3 - y^2 + 1 = 0$。

(240) $xy^2 - y^2 - 4x = 0$。

(241) $x(x^2 + y^2) - y^2 + x = 0$。

(242) $xy^2 = x^2 + 2x - \frac{5}{4}$。

(243) $x^4 + y^4 = a^4$。

(244) $x^4 - 4x^2y^2 - 6x^2 - 4y^2 = 0$。

(245) $(x^2 - y^2)^2 = 2x$。

(246) $(x^2 - y^2)(x - y) = 1$。

(247) $(x - y)xy + x + y = 0$。

(248) $x^2y^2 + y = 1$。

(249) $x^3 + xy^2 - x^2 - y^2 = 0$。

(250) $x^2 + y^2 = x^2y^2$。

(251) $x^4 - y^4 + x^2 + 2y^2 = 0$。

(252) $x^3 - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$。

(253) $(x^2 - y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ 。

(254) $xy^2 = -(\frac{x}{2} - 1)^2$。

(255) $x(x^2 - 3y^2) - 4(x^2 + y^2) = 0$。

(256) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$。

(257) $x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 = 0$。

(258) $x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0$。

(259) $xy^2 = (x - 1)^2$。

(260) $x^4 + y^4 - 2xy = 0$。

(261) $x^2 = y^2 + x^4$。

(262) $(x + 1)(x + 2)y^2 = x^2$。

(263) $y^2 = x^3 - 2x^2 + x$。

(264) $(x^2+y^2)^2=xy$。

(265) $x^3+y^3-x^2=0$。

(266) $x^3-27(x-y)^2=0$。

(267) $x^3-xy^2+ay^2=0$。

(268) $x^5-x^4+4x^2y-4y^2=0$。

(269) $x^4-x^2y+y^3=0$。

(270) $x^4+x^2y^2-18x^2y+9y^2=0$。

(271) $x^4+y^4=8xy^2$。

(272) $x^6-x^4+y^2=0$。

(273) $x^4-y^4+xy=0$。

(274) $(x^2+y^2)^3=27x^2y^2$。

275—281. 讨论并绘出由下列极坐标方程（有时是广义的）给出的曲线的象：

275) $r=\mathrm{tg}(\frac{\varphi}{2})$。

(276) $r^2=a^2\varphi$ $(a\neq0)$（法儿马螺线）。

(277) $r^2\varphi=a^2$, $a\neq0$（连锁螺线）。

(278) $r^2=a^2\varphi^4$, $a\neq0$（卡里勒亚螺线）。

(279) $r=a+\frac{1}{\varphi}$, $a\geqslant0$, $1>0$, $\varphi>0$。

(280) $r=a\sin(\frac{\varphi}{2})$, $a>0$。

(281) $r=a\sin3\varphi$, $a>0$（三叶玫瑰）。

§4. 曲线族*. 包络

设已知单参数曲线族的方程为

$$F(x, y C,) = 0, \tag{1}$$

其中 c 是参数，满足方程组

$$F(x, y, C) = 0, \quad F_c(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

的所有点的集合称为曲线族（1）的判别曲线。

如果在判别曲线的点上F_x和F_y不同时为零，则判别曲线与曲线族的包络（即这样的曲线，它在自己的每个点上与族中的某条曲线相切）重合。否则判别曲线可能不是包络，这种情况需要进一步的讨论。

由矢量方程$\overline{r} = \overline{r}(t, C)$给出的曲线族的判别曲线由方程组

$$\overline{r} = \overline{r}(t, C), \quad \overline{r}_t \times \overline{r}_c = \overline{0}$$

确定。

282—284. 讨论曲线族并作出图形：

(282) $C^2x^2 + y^2 = Cx$。

(283) $x^2 + 2cy = 2xy$。

(284) $x = \cos u \operatorname{ch} v$, $y = \sin u \operatorname{sh} v$，当1) v = 常数，2) u = 常数。

---

* 本节中的“曲线”均是指概论中的“线”。

——译者注

285. 证明：如果满足条件$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$，则曲线族$\varphi(x, y)=a$的每一条曲线与曲线族$\psi(x, y)=b$的任何一条曲线在它们的公共点处正交。

286. 证明与曲线族$\varphi(x, y)=a$正交的曲线族由下面的微分方程所确定：

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}。$$

287. 求与直线束正交的曲线族。

288. 求与Ox轴相切于坐标原点的圆族正交的曲线族。

289. 求与抛物线族$y^2=2ax$正交的曲线族。

290. 求与过两定点的圆族正交的曲线族。

291—299。求下列曲线族（具有奇异点）的包络：

(291) $(x-C)^2+y^2=a^2$。

(292) $(x-C)^2+(y-C)^2=C^2$。

(293) $x\cos C+y\sin c-p=0$。

(294) $y=(x-C)^3$。

(295) $y^2-(x-C)^3=0$。

(296) $y^3-(x-C)^2=0$。

(297) $3(y-C)^2-2(x-C)^3=0$。

(298) $(1-C^2)x+2Cy-a=0$。

(299) $C^2(x-a)-Cy-a=0$。

300. 求与坐标轴构成的三角形有固定面积S的直线族的包络。

301. 圆$x^2+y^2=R^2$是直线族$Ax+By+C=0$的

包络，系数A、B、C应当满足什么关系？

302. 定长为a的线段的端点沿直角坐标系的轴滑动，求线段所在的直线族的包络方程。

303. 求直线族的包络，该直线族是在平面上移动的直角的一边，而直角的另一边过定点F，直角顶描绘为：1）直线，2）圆。

304. 直线以固定的角速度绕着一点旋转，而点均匀地沿着另一直线移动，求这直线族的包络。

305. 求半径为r的圆族的包络，这圆族的圆心描绘成半径为R的圆。

306. 求圆族的包络，圆的直径为一已知抛物线的焦半径。

307. 求圆族的包络，圆的直径为抛物线$y^2=2px$的焦点弦。

308. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，以平行对称轴之一的弦为直径作圆，求每个圆族的包络。

309. 以双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的平行坐标轴之一的弦为直径作圆，求每个圆族的包络。

310. 求圆族的包络，圆以抛物线$y^2=2px$的垂直于其轴的弦为直径。

311. 已知焦参数为p，对称轴平行Ox轴，顶点描绘成抛物线$y^2=2qx$的抛物线族，求这个族的包络。

312. 求满足曲线族$F(x,y,\alpha,\beta)=0$包络的条件，这里α和β满足关系式$\varphi(\alpha,\beta)=0$。

313. 求曲线族$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1$的包络，这里$p+q=1$。

314. 求直线族$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$的包络，参数$\alpha$和$\beta$满足关系式$\alpha^m+\beta^m-a^m=0$，a为常数，指出$m=2$、1、$-2$的情况。

315. 在一个竖直平面上从一已知点以与水平线成各种角度，以同一个初速v_0抛出质点，求它们的轨迹(安全抛物线)的包络。

316. 圆$x^2+y^2=a^2$的半径投影到两坐标轴上，以这两投影为半轴作椭圆，求这椭圆族的包络。

§5. 弧长. 曲率

给出方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),$$

$$y=y(x),$$

$$r=r(\varphi)$$

的曲线，其弧长分别按下列公式计算：

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,$$

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi。$$

曲线的曲率分别按下列公式计算：

$$\kappa=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

$$\kappa=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}。$$

曲线在已知点的密切圆和曲线至少有二阶切触。密切圆的圆心也称为曲线在该点的曲率中心。被称为曲线在已知点的曲率半径的密切圆半径可根据公式$R=\frac{1}{\kappa}$求出，由密切圆限定的圆通常称为曲线的曲率圆。

317—322。计算下列曲线在两个任意点M_1和M_2之间的弧长：

(317) $y=x^{\frac{3}{2}}$。 (318) $y=\ln x$。

(319) $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$。 (320) $y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$。

(321) $x=a(\cos t+t\sin t)$,
$y=a(\sin t-t\cos t)$。

(322) $x=a(\ln\operatorname{tg}(\frac{t}{2})+\cos t)$, $y=a\sin t$。

323—328。计算下列曲线在两指定点之间的弧长：

(323) $y=\ln\cos x$, $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{3}$。

(324) $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-\sqrt{x}$，与$Ox$轴的交点。

(325) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$, $x_1=1$, $x_2=4$。

(326) $y=\ln\sec x$， $x_1=-\frac{\pi}{3}$， $x_2=\frac{\pi}{3}$。

(327) $x=t-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t$， $y=2\operatorname{ch}t$， $t_1=0$，

$t_2=2$。

(328) $x=8at^3$， $y=3a(2t^2-t^4)$，$t_1=0$，

$t_2=\sqrt{2}$。

329．求抛物线 $r=a\sec^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ 被Oy轴截得的弧长。

330．求旋轮线一拱弧的弧长。

331．求外摆线（内摆线）（见80、81题）一拱弧的弧长。

332—335．求整条曲线的长度：

(332) $x=a\cos^3 t$， $y=a\sin^3 t$。

(333) $r=a(1+\cos\varphi)$。

(334) $r=a\cos^4\left(\frac{\varphi}{4}\right)$。

(335) $r=a\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$。

336．求阿基米德螺线 $r=a\varphi$ 第一圈的弧线。

337．证明对数螺线 $r=ca^{\varphi}$ 从任意点到极点的弧长等于螺线在该点的极切线之长。

338．求曲线方程，曲线从某定点A到任意点M算得的弧长与在弧端切线的斜率成比例。

339．证明：悬链线 $y=a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ 由顶点到某点的弧长等于该点的纵坐标在过该点的切线上的投影。

340. 证明：由悬链线，它的两点的纵坐标线和横轴围成的面积与相应的弧长成比例，而且比例系数为悬链线的参数 a 。

341. 证明从悬链线的顶点到切线彼此垂直的两个切点的弧长的乘积是常数。

342. 建立圆的自然参数方程。

343. 建立悬链线 $y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ 的自然参数方程。

344—353. 求下列曲线的曲率：

(344) $y = \sin x$。　　(345) $y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$。

(346) $y^2 = 2px$。　　(347) $x = t^2$, $y = t^3$。

(348) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$。

(349) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$。

(350) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$。

(351) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$。

(352) $r = a\varphi$。　　(353) $r = a(1 + \cos\varphi)$。

354. 求方程 $F(x, y) = 0$ 给出的线的曲率。

355—356. 求下列线的曲率：

(355) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$。

(356) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$。

357. 计算曲线 $y = x^4$ 在点 $O(0, 0)$ 处的曲率。

358. 曲线由微分方程 $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ 给出，求其曲率。

359. 证明：在曲线的任意点均有$\kappa = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{2h}{\Delta s^2}$，这里h是由参数值为$s+\Delta s$的曲线点到参数值为s的曲线点的切线的距离。

360. 证明心脏线$r = 2a(1-\cos\varphi)$在任意点的曲率半径等于在该点极法线长的$\frac{2}{3}$，指起对于心脏线任意点的曲率中心的作图方法。

361. 证明抛物线$y = \frac{x^2}{2p}$的曲率半径等于$R = \frac{p}{\cos^3\alpha}$其中$\alpha$为切线对极轴的倾角。

362. 证明对数螺线$r = ca^{\varphi}$在任意点的曲率半径等于该点的极法线长，利用这个性质，给出在对数螺线任意点上密切圆的作图方法。

363. 计算曳物线$x = a(\ln\operatorname{tg}(\frac{t}{2}) + \cos t), y = a\sin t$的曲率半径，并指出在任意点曲率中心的作法。

364. 证明摆线上任意点与相应该点的曲率中心的联线段被摆线的基线所平分，指出由此得出的对于摆线上任意点的曲率中心的作法。

365. 证明悬链线任意点的纵坐标是它的参数和在该点的曲率半径的比例中项。

366. 证明贝努利双纽线$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$在任意点的曲率半径为该点极法线长的$\frac{1}{3}$。在这个性质的基础上指出在双纽线任意点曲率中心的作法。

367。给出作相应于椭圆顶点的曲率中心的几何方法。

368。写出在椭圆顶点 $A(a, 0)$，$B(0, b)$处的密切圆方程。

369。写出曲线 $y = \sin x$ 在点 $A\ (\frac{\pi}{2},\ 1)$ 处的密切圆方程

370。求等边双曲线 $xy = 1$ 的半径最小的密切圆。

371—373。在下列曲线上求曲率为极值的点（曲线顶点）：

(371) $y = e^x$。

(372) $\begin{cases} x = at - d\sin t, \\ y = a - d\cos t。\end{cases}$

(373) $r = a\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$。

374。证明：使两曲线在公共点至少有二阶切触的充要条件是，它们具有公切线和相同的曲率矢量。

375。证明：曲线在曲率半径为极大值或极小值的点上，曲线与密切圆至少有三阶切触。

376。求抛物线 $y^2 = 2px$ 的密切圆的中心坐标和半径。在抛物线的什么点上密切圆与曲线有三阶切触？

377。设相切于点M的曲线 L_1 和 L_2，在M点的邻域内位于切线一侧，且 $0 < \kappa_1 < \kappa_2$，其中 κ_1、κ_2 分别是两曲线在M点的曲率。证明：在点M邻域内曲线 L_1 包围曲线 L_2。

378。证明：如果在点A曲率半径具有极大值，则在点A的邻域内曲线位于曲率圆的内部。

379。证明：如果在点A曲率半径具有极小值，则在点

A的邻域内曲线位于曲率圆的外面。

380. 求与正弦曲线 $y=\sin x$ 在点A $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 有相同切线和曲率的抛物线 $y=ax^2+bx+c$。

381. 一抛物线的对称轴平行于Ox轴，它在点A(1,2)处的密切圆是 $x^2+y^2=5$。求这抛物线的方程。

§6. 渐缩线和渐伸线. 自然方程

渐缩线，就是由§1方程（2）给出的曲线的曲率中心所组成的图形，它的方程为

$$X = x - y' \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},$$

$$Y = y + x' \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}。$$

如果曲线γ是曲线γ*的渐缩线，则称曲线γ*是已知曲线γ的渐伸线。若曲线γ由方程 $\overline{r}=\overline{r}(s)$ 给出，那么它的渐伸线族方程为 $\overline{\rho}=\overline{r}+(\lambda-s)\overline{\alpha}$，其中 $\overline{\alpha}$ 是曲线γ的单位切矢量，而λ是任意参数。

我们将曲线的曲率记为确定的符号，它可根据公式 $\kappa=\frac{1}{R}=\frac{d\varphi}{ds}=\dot{\varphi}$ 计算，其中φ是曲线的切线与Ox轴的夹角，今后在字母之上的点表示对于弧长参数的微分。形式为

$$\kappa=\kappa(s),\quad F(\kappa, s)=0,$$

$$\kappa=\kappa(t),\quad s=s(t)$$

的方程称为曲线的自然方程。

如果给出曲线的自然方程，则曲线的参数表示可由下面形式给出：

$$x=\int\cos\varphi(s)ds,\ y=\int\sin\varphi(s)ds。$$

382。圆的渐缩线是什么？

383—392 .求下列曲线的渐缩线方程并作图：

(383) $x=a\cos t$，$y=b\sin t$。

(384) $x=a\,\text{ch}\,t$，$y=b\,\text{sh}\,t$。

(385) $y=x^2$。

(386) $y=x^{2k}$，k为大于1的自然数。

(387) $y=x^{2k+1}$，k为任意自然数。

(388) $y=\ln x$。　　(389) $y=\sin x$。

(390) $y=\text{tg}\,x$，$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$。

(391) $x=a(\ln\text{tg}(\frac{t}{2})+\cos t)$，$y=a\sin t$。

(392) $r=a(1+\cos\varphi)$。

393。证明摆线的渐缩线是和该摆线全等的摆线。

394。证明星形线的渐缩线是与已知星形线相似的星形线，其相似比为2，且关于已知曲线旋转$\frac{\pi}{4}$的角。

395。证明对数螺线$r=ca^{\varphi}$的渐缩线是对数螺线，这个对数螺线由已知曲线绕极点转动某一个角得到。

396。为使对数螺线$r=ca^{\varphi}$的渐缩线与螺线本身重合，求参数a应满足的条件。

397. 建立圆 $x^2 + y^2 = {}^2a$ 的渐伸线方程并作图。

398. 建立悬链线 $y = a\,ch\left(\frac{x}{a}\right)$ 过项点的渐伸线方程并作图。

399. 建立抛物线 $x = t$, $y = \frac{t^2}{4}$ 的渐伸线方程。

400—402. 将下列曲线表示为某些其它曲线的渐缩线后求它们的弧长:

(400) 星形线 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$。

(401) 旋轮线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - ost)$, 的一个拱弧。

(402) 心脏线 $r = a(1 + \cos\varphi)$ 。

403—407. 建立曲线的自然方程:

(403) $y = x^{\frac{3}{2}}$ 。 (404) $y = \ln x$。

(405) $x = a(\cos t + t\sin t)$,

$y = a(\sin t - t\cos t)$ 。

(406) $x = a(\ln tg(t/2) + \cos t)$, $y = a\sin t$。

(407) $a(1 + \cos\varphi)$。

408—411. 怎样的曲线具有下面的自然方程?

(408) $\kappa = a$。 (409) $R = as$。

(410) $R = (a^2 + s^2)/a^2$。

(411) $s^2 + R^2 = 16a^2$

412—415. 建立下列曲线的参数表示:

(412) $R\sin^3\varphi = a$。 (413) $R = ae^{\varphi}$。

(414) $R = a\varphi$。 (415) $s = a\,tg\varphi$。

416．证明：旋轮线是摆线，这就是，说如果旋轮线的一个拱弧安置在竖直平面内，使顶点A向下，那么，质点在地球重力的作用下，由某个起始位置M到顶点A沿旋轮线移动所化费的时间与质点的起始位置无关。

第三章　空间的曲线和线

§7. 曲线和线的方程

R^3中的曲线（或线）的参数表示

$$\overline{r}=\overline{r}(t) \qquad (1)$$

称为该曲线（或线）的矢量参数方程。

若$\overline{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$，则方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \qquad (2)$$

称为曲线（或线）的参数方程。

设$F(x, y, z)$和$G(x, y, z)$是两个光滑函数，而L是方程组

$$F(x,y,z)=0 \quad G(x,y,z)=0 \qquad (3)$$

解的集合。

如果在点$M\in L$处，矢量

$\operatorname{grad}F=(\partial_x F,\ \partial_y F,\ \partial_z F)$ 和

$\operatorname{grad}G=(\partial_x G,\ \partial_y G,\ \partial_z G)$

不共线，那么在点M的邻域内方程组（3）的每一个方程给出一个曲面，而这两个曲面相交为包含在集合L内的线。

417．在直角坐标系下圆柱由方程$x^2+y^2=a^2$给出。设M沿这个圆柱这样运动：它在Oz轴上的投影是沿该轴以固定速度移动，在xOy平面上的投影是沿着圆均匀地转

动，点M的轨迹称为螺旋线。建立螺旋线的参数方程并求出它在各坐标平面上的投影。

418． M点沿着圆柱的母线以与走过的路程成比例的速度运动，同时圆柱绕着自己的轴以固定的角速度旋转，求M点轨迹的参数方程。

419． 曲线的象是半径为R的球面与直径为R且有一条母线过球心的圆柱面的交线，求这曲线。它称为维维安尼曲线。

420． 与Oz轴不垂直的直线OL绕着Oz轴以固定的角速度ω均匀地旋转，M点沿直线OL运动：1）速度与动点到O点的距离OM成比例；2）常速。在第一种情况点M形成圆锥螺线，在第二种情况点M形成圆锥螺旋线，写出这些曲线的参数方程。

421． 两个半径分别为a和b的圆柱的轴交成直角、两圆柱的交线形成两条闭曲线，合称为双柱面曲线。写出双柱面曲线的隐式方程，并给于其中一个以参数表示。在$a=b$的情况下交线是什么？

422．证明：曲线$x=at\cos t$，$y=at\sin t$，$z=\frac{a^2t^2}{2p}$在旋转抛物面上，且它在xOy平面上的投影是阿基米德螺线。

423． 求曲线$x=t$、$y=t^2$、$z=t^3$在各坐标平面上的投影。

424． 证明：曲线$x=a\operatorname{ch}t$、$y=b\operatorname{sh}t$、$z=ct$在双曲柱面上，求它在各坐标平面上的投影。

425．求双曲抛物面$z=x^2-y^2$和平面$x+y-z+1$

$=0$的交线在xOy平面上的投影。

426. 证明：椭圆抛物面$x=y^2+z^2$和平面$x-2y+4z-4=0$的交线在yOz平面上的投影是半径$R=3$，圆心在点$M(0,1,-2)$的圆。

427. 证明：曲线$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，$z=a\cos 2t$在某个柱面的有界部分内，该柱面的准线是星形线，母线平行于Oz轴。

428. 将曲线$x=t$，$y=t^2$，$z=e^t$表示成两个曲面交线的形式。

429. 证明：曲线$x=\sin 2\varphi$，$y=1-\cos 2\varphi$，$z=2\cos\varphi$在球面上，且是抛物柱面和圆柱面的交线。

430. 证明：曲线$x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\cos t$在椭球面上。

431. 证明：曲线$x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=ct$在圆锥面上。

432. 单叶双曲面$x^2-y^2+z^2=1$和$y^2+z^2-x^2=1$相交时得到什么？

§8. 弗朗内标架. 弧长

对于在空间R^3中给出的曲线（线），弗朗内标架的矢量记为$\overline{\alpha}$、$\overline{\beta}$、$\overline{\gamma}$，而坐标轴和坐标平面有专门的名称：矢量$\overline{\alpha}$的轴是切线，矢量$\overline{\beta}$的轴称为主法线，矢量$\overline{\gamma}$的轴称为付法线，矢量$\overline{\beta}$和$\overline{\alpha}$的平面是密切面，矢量$\overline{\beta}$和$\overline{\gamma}$的平面称为法平面，矢量$\overline{\alpha}$和$\overline{\gamma}$的平面称为从切面。

由§7方程（1）和（2）给出的曲线，其切线方程分别为

$$\overline{R}=\overline{r}+\tau\overline{r}'$$

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}$$

其中$\overline{R}$是切线上流动点的径矢，而X、Y、Z是矢量$\overline{R}$的坐标。

主法线方程：

$$\overline{R}=\overline{r}+\lambda\ ((\overline{r}'\times\overline{r}'')\times\overline{r}'),$$

或 $$X=x+\lambda\left(z'\begin{vmatrix}z' & x'\\ z'' & x''\end{vmatrix}-y'\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}\right),$$

$$Y=y+\lambda\left(x'\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}-z'\begin{vmatrix}y' & z'\\ y'' & z''\end{vmatrix}\right),$$

$$Z=z+\lambda\left(y'\begin{vmatrix}y' & z'\\ y'' & z''\end{vmatrix}-x'\begin{vmatrix}z' & x'\\ z'' & x''\end{vmatrix}\right)。$$

付法线方程：

$$\overline{R}=\overline{r}+\lambda\ (\overline{r}'\times\overline{r}''),$$

或 $$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}y' & z'\\ y'' & z''\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}z' & x'\\ z'' & x''\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}}。$$

密切面方程：

$$(\overline{R}-\overline{r},\ \overline{r}',\overline{r}'')=0,$$

或 $$\begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}=0$$

法平面方程：

$$(\overline{R}-\overline{r})\cdot\overline{r}'=0,$$

或 $(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0$。

从切面方程：

$$(\overline{R}-\overline{r},\ \overline{r}',\overline{r}'\times\overline{r}'')=0,$$

或

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix}=0。$$

切线、主法线和付法线上的单位矢量分别按下列公式求得：

$$\overline{\alpha}=\frac{\overline{r}'}{|r'|},\quad \overline{\beta}=\frac{(\overline{r}'\times\overline{r}'')\times\overline{r}'}{|r'\times r''|\ |r'|},$$

$$\overline{\gamma}=\frac{\overline{r}'\times\overline{r}''}{|\overline{r}'\times r''|}\quad。$$

曲线的弧长，或者说自然参数由公式

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

确定。

433—435. 建立下列曲线在所指出的点的切线方程：

(433) $x=\sec t$，$y=tg\,t$，$z=at$在$t=\pi/4$。

(434) $x=e^t$，$y=e^{-t}$，$z=t^2$在$t=1$。

(435) $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$在$t=0$

436. 建立曲线

$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$z=4a\sin(t/2)$在点$t=\pi/2$的切线方程。切线与O z轴构成怎样的角？

437. 在哪些点曲线$x=3t-t^3$，$y=3t^2$，$z=3t+t^3$的切线与平面$3x+y+z+2=0$平行？

438。建立螺旋线 $x=2\cos t$，$y=2\sin t$，$z=4t$ 在点 $t=0$ 的切线和法平面方程。

439。已知曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$，写出在点 $t=1$ 处的切线和法平面方程。这条曲线的所有切线与 xOy 平面相交得到怎样的曲线？

440。证明：曲线 $x=e^{t/\sqrt{2}}\cos t, y=e^{t/\sqrt{2}}\sin t$，$z=e^{t/\sqrt{2}}$ 位于锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上，且它与母线相交成45°角。

441。写出维维安尼曲线（见419题）的切线和法平面方程。

442。将曲线的所有切线单位矢量放到坐标原点，它们的端点形成的图形称为曲线的球面标线，求螺旋线的球面标线。

443。证明：如果空间曲线的所有法平面过定点，则曲线位于球面上（这种曲线称为球面曲线）。

444。建立曲线的切线和法平面方程，该曲线是两个曲面的交线：

$$F(x, y, z)=0, \quad \Phi(x, y, z)=0,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix}=2。$$

445。写出曲线 $x^2=2az$，$y^2=2bz$ 在任意点的切线和法平面方程。

446。求曲线 $x^2+y^2=1$，$y^2+z^2=1$ $(y\neq\pm1)$ 在任意点的法平面方程。

447。证明：曲线

$x=a\sin^2 t$，$y=a\sin t\cos t$，$z=a\cos t$ 的法平面过坐标原点。

448. 设 $\overline{r}=\overline{r}(s)$为曲线的自然参数方程，$\pi$为过曲线的点$M_0(s_0)$的直线，从点$M(s_0+\triangle s)$到直线$\pi$的距离为$d(\triangle s)$。证明：直线$\pi$为曲线$\overline{r}=\overline{r}(s)$在点$M_0$的切线的充要条件是 $\lim\limits_{\triangle s\to 0}\dfrac{d(\triangle s)}{\triangle s}=0$.

449. 证明：双正则曲线$\overline{r}=\overline{r}(t)$在已知点$M_0(t_0)$的密切面能够用下列条件之任一条件定义：

1）过点M_0且有方向矢量$\overline{r}'(t_0)$和$\overline{r}''(t_0)$的平面。

2）设π为过曲线在点M_0的切线的平面，$\overline{\rho}=\overline{\rho}(s)$为曲线的自然参数方程，在点$M_0$相应的参数值为$s_0$，$d(\triangle s)$是从点$M(s_0+\triangle s)$到平面$\pi$的距离，当且仅当

$$\lim_{\triangle s\to 0}\frac{d(\triangle s)}{\triangle s^2}=0$$

时平面π是曲线在点M_0的密切面。

3）与曲线在点M_0至少有二阶切触的平面。

450. 证明：如果双正则曲线所有的密切面经过一个定点，则这条曲线是平面曲线。

451. 求曲线$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$过已知点$M_0(2, -1/3, -6)$的密切面方程。

452. 证明：过曲线$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$的任意点M所作的平行平面$z=0$并与Oz轴相交的直线位于曲线在点M的密切面上。

453. 求曲线$x=a\cos t$，$y=b\sin t$，$z=e^t$在点$t=0$的密切面方程。

454. 在曲线$x=\cos\alpha\cos t$，$y=\cos\alpha\sin t$，$z=t\sin\alpha$，α为常数的付法线上沿正向截取单位长的线段。写出这些线段终点形成的曲线的密切面方程。

455. 建立球面$x^2+y^2+z^2=9$和双曲柱面$x^2-y^2=3$的交线在点M（2，1，2）的密切面方程。

456. 证明：曲线$x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=2t$位于曲面$x^2+y^2-e^z=0$上，且曲线的密切面与曲面的切平面重合。

457—458. 建立下列曲线在指出点的主法线和付法线方程：

(457) $x=t$，$y=t^2$，$z=e^t$在$t=0$。

(458) $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$在$t=1$。

459. 在曲线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$z=4a\sin(t/2)$的每点的主法线上沿矢量$\overline{\beta}$的方向取长度为$a\sqrt{1+\sin^2(t/2)}$的线段，证明由这些线段的终点形成的曲线是正弦曲线。

460. 在曲线$x=t/2$，$y=\ln t$，$z=-t^2$上求点，使在该点的付法线与平面$x-y+8z+2=0$平行。

461. 在螺旋线的付法线的同一侧取等长的线段，证明这些线段的终点位于另一螺旋线上。

462. 求曲线$x=t\sin t$，$y=t\cos t$，$z=te^t$在坐标原点的切线、主法线和付法线的单位矢量。

463—464. 求下列曲线在任意点的切线、主法线和付法线的单位矢：

(463) $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $z=\cos 2t$。

(464) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $z=4a\cos(t/2)$。

465. 证明：曲线

$$x=t,\quad y=t^2,\quad z=t^3$$

在点O(0, 0, 0)的基本矢$\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$分别与坐标轴的单位矢重合。

466. 建立螺旋线

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt$$

的切线、法平面、付法线、密切面、主法线和从切面的方程。证明：其主法线与螺旋线的轴垂直相交，而付法线与轴线夹定角。求弗朗内标架矢量。

467. 写出曲线$\overline{r}=\overline{r}(s)$的切线、主法线和付法线与$xOy$平面的交点描绘的曲线矢量方程。

468. 求螺旋线$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$与xOy平面交点到任意点M的弧长。

469. 写出螺旋线的自然方程。

470. 求曲线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),$$

$$z=4a\cos(t/2)$$

与xOz平面的两个交点间一圈的弧长。

471. 求曲线$x^3=3a^2y$, $2xz=a^2$在平面$y=\frac{a}{3}$与$y=9a$间的弧长。

472. 证明：闭曲线$x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $z=\cos 2t$的长度为$s=10$。

473. 求曲线 $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $z = at$ 在参数值为 0 与 t 的两个点之间的弧长。

474. 求曲线在圆柱坐标系中弧长微分的表达式。

475. 求曲线在球面坐标系中弧长微分的表达式。

§9. 弗朗内公式. 曲率和挠率. 自然方程

空间 R^3 内的有向双正侧曲线的弗朗内公式为

$$\frac{d\overline{\alpha}}{ds} = \kappa\overline{\beta},\quad \frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\kappa\overline{\alpha} + \tau\overline{\gamma},\quad \frac{d\overline{\gamma}}{ds} = -\tau\overline{\beta},$$

其中 κ 和 τ 是被分别称为曲率和挠率的第一和第二曲率。

由 §7 方程（1）和（2）给出的曲线，其曲率根据公式

$$\kappa = |\overline{r}' \times \overline{r}''| / |\overline{r}'|^3,$$

或

$$\kappa = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

计算。

计算挠率的公式为：

$$\tau = (\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}''') / (\overline{r}' \times \overline{r}'')^2,$$

或

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}$$

特别在取自然参数 s 作为参数时，则有

$$\kappa = |\ddot{\overline{r}}|,\quad \kappa = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

$$\tau = (\dot{\overline{r}}, \ddot{\overline{r}}, \dddot{\overline{r}}) / \ddot{\overline{r}}^2,$$

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}。$$

其中用点表示对参数 s 求导。

方程 $\kappa = \kappa(s)$，$\tau = \tau(s)$称为曲线的自然方程。

476。对曲线 $\overline{r} = \overline{r}(s)$，验证下列关系式：

$$|\dddot{\overline{r}}|^3 = \kappa^4 + \kappa^2\tau^2 + \dot{\kappa}^2,$$

$$\dot{\overline{r}} \cdot \ddot{\overline{r}} = 0,\quad \dot{\overline{r}} \cdot \dddot{\overline{r}} = -\kappa^2,\quad \ddot{\overline{r}} \cdot \dddot{\overline{r}} = \kappa\dot{\kappa}。$$

477。证明弗朗内公式：

$$\dot{\overline{\alpha}} = \kappa\overline{\beta},\quad \dot{\overline{\beta}} = -\kappa\overline{\alpha} + \tau\overline{\gamma},\quad \dot{\overline{\gamma}} = -\tau\overline{\beta}$$

能写成形式

$$\dot{\overline{\alpha}} = \overline{\omega} \times \overline{\alpha},\quad \dot{\overline{\beta}} = \overline{\omega} \times \overline{\beta},\quad \dot{\overline{\gamma}} = \overline{\omega} \times \overline{\gamma},$$

求矢量 $\overline{\omega}$（达布矢），并说明它的运动学意义。

478。证明：

1） $(\overline{\alpha}, \overline{\gamma}, \dot{\overline{\gamma}}) = \tau$。

2） $(\dot{\overline{\gamma}}, \ddot{\overline{\gamma}}, \dddot{\overline{\gamma}}) = \tau^5 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}$。

3） $(\dot{\overline{\alpha}}, \ddot{\overline{\alpha}}, \dddot{\overline{\alpha}}) = \kappa^5\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\cdot}$。

479. 证明：曲线为直线或它的开子集的充要条件是 $\kappa = 0$。

480. 证明：双正则曲线是平面曲线的充要条件是 $\tau = 0$。

481. 证明：曲线L在点M_0的曲率等于L在它的密切面上的投影L^*在点M_0的曲率。

482—483. 证明下列曲线的曲率和挠率相等：

(482) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$，$y = a\,\mathrm{sh}\,t$，$z = a\,t$。

(483) $x = 3t - t^3$，$y = 3t^2$，$z = 3t + t^3$。

484. 求螺旋线

$x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$z = b\,t$

的曲率和挠率。

485. 求圆锥螺旋线

$x = t\cos t$，$y = t\sin t$，$z = a\,t$

在坐标原点的曲率。

486—489. 求下列曲线的曲率和挠率。

(486) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$，$y = a\,\mathrm{sh}\,t$，$z = a\,t$。

(487) $x = e^t$，$y = e^{-t}$，$z = \sqrt{2}\,t$。

(488) $x = 2t$，$y = \ln t$，$z = t^2$。

(489) $x = \cos^3 t$，$y = \sin^3 t$，$z = \cos 2t$

490. 当a和b为何值时，曲线

$x = a\,\mathrm{ch}t$，$y = a\,\mathrm{sh}\,t$，$z = b\,t$

在所有点的挠率和曲率相等？

491. 求曲线

$x = \cos^3 t$，$y = \sin^3 t$，$z = \cos 2t$

曲率为极小值（局部）的点。

492. 曲线

$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a\cos(t/2)$

的曲率半径在哪些点获得局部极小值？

493. 证明：圆锥螺线

$$x = a\cos\varphi \cdot e^{k\varphi},\ y = a\sin\varphi \cdot e^{k\varphi}\ z = be^{k\varphi}$$

的曲率半径与螺线点到锥面轴的距离成比例。

494—495. 证明下列曲线是平面曲线，并建立曲线所在的平面方程：

(494) $x = \dfrac{1+t}{1-t},\ y = \dfrac{1}{1-t^2},\ z = \dfrac{1}{1+t}$。

(495) $x = a_1t^2 + b_1t + c_1,$

$y = a_2t^2 + b_2t + c_2,$

$z = a_3t^2 + b_3t + c_3$。

496. 求函数 $f(t)$，使曲线

$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = f(t)$

为平面曲线。

497. 切线与固定方向作固定角的空间曲线称为一般螺旋线。证明：曲线为一般螺旋线是当且仅当下列条件之一成立：

（1）主法线与固定方向垂直。

（2）付法线与固定方向作固定角。

（3）曲率和挠率之比为定值。

498. 证明：曲线为一般螺旋线的充要条件是$(\ddot{\bar{r}},\ \dddot{\bar{r}},\ \bar{r}^{(4)}) = 0$

499. 证明：曲线 $x^2 = 3y,\ 2xy = 9z$ 是一般螺旋线。

500. 证明：曲线

$$x=2t,\quad y=\ln t,\quad z=t^2$$

是在母线平行矢量$\overline{a}=(0,1,1)$的柱面上的一般螺线。

501. 求曲线$x=at$，$y=bt$，$z=ct^3$为一般螺线的条件。

502. 证明：若双正则曲线的所有法平面含有固定矢量$\overline{e}$，则曲线为平面曲线。

503. 证明：若双正则曲线的密切面均与某固定直线垂直，则曲线为平面曲线。

504. 证明：若在两条曲线的点之间建立这样的对应，使在对应点上的切线平行，则在这些对应点上曲线的挠率和曲率有相同的比例系数。

505. 一条曲线的主法线同时是另一条曲线的主法线，这种曲线称为贝特朗曲线。证明：贝特朗曲线的特征是$\lambda\kappa+\mu\tau=1$，其中λ、μ是常数。

506. 证明：贝特朗曲线在对应点的切线的夹角为定值。

507. 证明：贝特朗曲线在两对应点间的距离为定值。

508. 证明：具有常曲率的曲线是贝特朗曲线，再证明：这时对应曲线具有相同的曲率，且曲线之一是另一曲线的曲率中心轨迹，在对应点切线互相垂直。

509. 两条曲线的点之间确立了一一对应关系，使它们在对应点的切线、主法线和付法线平行。证明：$\dfrac{\kappa^*}{\kappa}=\dfrac{ds}{ds^*}=\dfrac{\tau^*}{\tau}$，其中$\kappa$、$s$、$\tau$分别为一条曲线的曲率、弧长和挠率。$\kappa^*$、$s^*$、$\tau^*$为另一曲线的相应值。

510. 曲线$\overline{\rho}=\overline{r}-s\overline{\alpha}$称为挠曲线$\overline{r}=\overline{r}(s)$的渐伸线。试用曲线$\overline{r}=\overline{r}(s)$的曲率和挠率表示渐伸线的曲率和挠率，证明若曲线$\overline{r}=\overline{r}(s)$是一般螺旋线，则曲线$\overline{\rho}=\overline{r}-s\overline{\alpha}$是平面曲线。

511. 证明：若一曲线的曲率和挠率是定值，则这曲线为圆柱螺线。

512. 已知圆柱螺线的曲率κ和挠率τ，建立曲线的参数方程。

513. 证明在所有的贝特朗曲线中只有圆柱螺线存在着无数与它具有公共主法线的曲线。

514—515. 建立下列曲线的自然方程：

(514) $x=a\,ch\,t$, $y=a\,sh\,t$, $z=a\,t$

(515) $x=ct$, $y=\sqrt{2}\,c\sin t$, $z=c\,t^{-1}$

516. 已知曲线的自然方程为$\kappa=\kappa(s)$，$\tau=\tau(s)$证明与已知曲线关于坐标原点对称的曲线的自然方程是$\kappa=\kappa(s)$，$\tau=-\tau(s)$。

517. 证明：当两条曲线的切触阶不低于三阶时，在它们的公共点挠率相等。反之正确吗？

518. 求直线的两切线间最短距离关于切点间的距离的无穷小阶数，并对主法线和付法线解决类似的问题。

519. 证明曲线和曲线在一点的密切圆至少有二阶切触。

520. 在什么条件下圆柱螺线的曲率中心位于螺线本身所在的圆柱面上？

521. 与曲线在已知点至少有三阶切触的球称为该点的密切球（曲线与曲面切触的定义见§11）。证明，如果给出

曲线方程$\overline{r}=\overline{r}(s)$，那么密切球中心的径矢由公式$\overline{r}_c=\overline{r}+R\overline{\beta}+\frac{\dot{R}}{\tau}\overline{\gamma}$给出，而密切球的半径由公式

$R_c=\sqrt{R^2+\frac{\dot{R}^2}{\tau^2}}$给出，其中$R=\frac{1}{\kappa}$

522—523。求下列曲线在任意点的密切球的半径。

(522) $x=e^t$，$y=e^{-t}$，$z=\sqrt{2}\,t$。

(523) $x=e^t\sin t$，$y=e^t\cos t$，$z=e^t$。

524。证明，若两条曲线在某点至少有三阶切触，则它们在该点具有同一个密切球。

525。若密切球半径为定值，则曲线为球面曲线（位于球面上）或具有常曲率。试证之。

526。求螺旋线

$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$

的密切球中心的集合。

527。证明：曲线的密切平面与密切球面交于密切圆。

第四章　曲　面

§10. 曲　面　方　程

设S是曲面，（U，$\overline{r}$）是它的参数表示。方程

$$\overline{r}=\overline{r}(u,\ v) \tag{1}$$

称为在曲面S上区域$\overline{r}$（U）的矢量方程。如果存在集合W = {(u, v)} 上的矢函数（1），使象$\overline{r}$(W) 等于 S，则（1）称为曲面的矢量方程，即使偶（w，$\overline{r}$）可能不是S的参数表示。若

$\overline{r}(u,\ v)=(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))$，那么方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v) \tag{2}$$

称为曲面的参数方程。

通常将曲面的参数表示给为：$x=u$，$y=v$，$z=f(u,v)$，其中 f 是光滑函数。此时方程

$$z=f(x,\ y) \tag{3}$$

称为曲面的显式方程。

设F(x, y, z)是光滑函数，S是方程

$$F(x,y,z)=0$$

的解的集合，如果在点M∈S处矢量grad F = ($\partial_x F$,

$\partial_y F$, $\partial_z F$)不为零，则在点M邻域内S是曲面且称(4)为曲面的隐式方程。

528. 已知曲线 $x = f(u)$, $z = g(u)$在xOz平面上与Oz轴不相交，求此曲线绕Oz轴旋转而得到的曲面的参数表示。

529. 求圆

$x = a + b\cos u$, $y = 0$, $z = b\sin u$ $(b < a)$

绕Oz轴旋转形成的圆环面方程。

530. 写出曲线

$x = a\,\mathrm{ch}(u/a)$, $y = 0$, $z = u$

绕Oz轴旋转得到的悬链面方程。

531. 写出曳物线 $x = a\sin u$, $y = 0$, $z = a(\ln \mathrm{tg}(u/2) + \cos u)$绕Oz轴旋转得到的伪球面方程。

532. 取曲面的直母线为坐标曲线，写出双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

的参数方程。如果曲面的方程取为 $z = pxy$ 其参数方程怎样?

533. 写出柱面的参数方程，其母线平行Oz轴而准线为方程

$x = f(u)$, $y = \varphi(u)$, $z = 0$。

534. 写出双曲柱面和抛物柱面的参数方程。

535. 写出柱面方程，其准线是$\overline{\rho} = \overline{\rho}(u)$，而母线平行矢量$\overline{e}$。

536. 写出柱面参数方程，其母线平行矢量$\overline{a}$(1, 2, 3)，而准线为方程

$x = u$，$y = u^2$，$z = u^3$。

537．写出柱面的隐式方程，其准线为

$x = \cos u$，$y = \sin u$，$z = 0$，

而直母线平行矢量$\overline{a}$（$-1, 3, -2$）。

538．证明，若柱面的母线与矢量$\overline{a}$（l，m，n）平行，则柱面方程具有形式$f(nx - lz, ny - mz) = 0$

539．求柱面方程，其准线是

$x^2 + y^2 = ay$，$z = 0$

而母线平行矢量$\overline{a}$（l，m，n）。

540．已知曲面

$x = 3u + v^2 + 1$，$y = 2u + v^2 - 1$，$z = -u + 2v$

1）证明这个曲面是柱面。

2）写出这个曲面的任一参数方程。

3）求过点M（$u = 2$，$v = 3$）的直母线。

541．已知点M（a, b, c）和曲线L

$x = f(u)$，$y = \varphi(u)$，$z = \psi(u)$，

写出顶点在M，准线为L的锥面的参数方程和隐式方程。

542．建立锥面方程，这锥面由过点M（a, b, c）且与抛物线$y^2 = 2px$，$z = 0$相交的直线形成。

543．建立锥面方程，其顶点为点M（$-1, 0, 0$）并与抛物面$2y^2 + z^2 = 4x$外切。

544，已知曲面

$x = u + v$，$y = u - v$，$z = uv$。

验证点A（$4, 2, 3$），B（$1, 4, -2$）是否在曲面上。

545．方程

$x = u + \sin v$，$y = u + \cos v$，$z = u + a$

给出怎样的曲面？

546. 求参数方程为

$$x = x_0 + a\cos u\cos v,\quad y = y_0 + b\cos u\sin v,$$

$$z = z_0 + c\sin u$$

的曲面的隐式方程。

547. 证明方程

$$x = \frac{u}{u^2+v^2},\quad y = \frac{v}{u^2+v^2},\quad z = \frac{1}{u^2+v^2}$$

和 $x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = u^2$

表示同一个曲面。

548. 已知锥面的方程

$\overline{r} = u\,\overline{e}(v),\quad |\overline{e}| = |\overline{e}'| = 1$。

试问参数 u 和 v 有何几何意义？

549—551. 说明下列平面上坐标曲线的形状：

(549) $x = u,\quad y = v,\quad z = 0$。

(550) $x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = 0$。

(551) $x = \cos u\,\mathrm{ch}\,v,\quad y = \sin u\,\mathrm{sh}\,v,\quad z = 0$。

552. 证明单叶双曲面的参数方程能写成

$$x = a\frac{uv+1}{u+v},\quad y = b\frac{u-v}{u+v},\quad z = \frac{uv-1}{u+v}。$$

在所指出的参数表示下曲面的坐标曲线如何？

553. 写出圆柱面的参数方程，使其坐标曲线为：

1）螺旋线和圆；

2）螺旋线和直母线；

3）两族螺旋线。

554. 写出曲线 $\overline{\rho} = \overline{\rho}(u)$ 的切线曲面的参数方程。

555. 写出螺旋线

$$x = a\cos u,\quad y = a\sin u,\quad z = bu$$

的切线曲面的参数方程，这个图形是曲面吗?

556. 某条曲线（母线）绕轴转动，同时沿此轴方向作平移运动，而且这两个运动的速度成比例，该曲线形成的图形称为一般螺面。建立一般螺面的方程。

557. 以与轴相交的直线为母线的螺面，如果母线与轴垂直，此螺面称为正螺面，如果母线与轴不垂直，螺面称为斜螺面。取O z 轴为旋转轴，写出这些螺面的方程。

558. 求由螺旋线的主法线形成的曲面的方程。

559. 与轴垂直的直线绕轴转动，同时直线沿轴移动而得到的曲面称为正劈锥曲面。若轴为O z 轴，写出正劈锥曲面的方程。

560. 求正劈锥曲面的隐式方程，它沿O z 轴的移动由公式 $z = a\sin 2v$ 确定，其中 v 是直线旋转的角速度。

561. 求曲面 $x^2z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ 的参数方程，证明这个曲面是正劈锥曲面。

562. 半径为 a 的圆这样移动：它的中心沿已知曲线 $\overline{\rho} = \overline{\rho}(s)$ 运动，而圆所在的平面在每个时刻都是该曲线的法平面，求由圆所形成的曲面的方程（这种曲面称为管状曲面）。

563. 以参数式 $\overline{r} = \overline{r}_1(u) + \overline{r}_2(v)$ 表示的曲面称为平移曲面，其中 $\overline{r}_1$、$\overline{r}_2$ 为光滑的矢函数。证明，平移曲面能由某一曲线平移而得到。

564. 线段的两端点分别在两已知曲线上。证明由线段中点形成的曲面为平移曲面。

565. 证明，正螺面

$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = av$

在 $u \leqslant c$ （c 为某个正数）时是平移曲面。

566. 证明椭圆抛物面和双曲抛物面是平移曲面。

567. 证明二次曲面的任意点的坐标 x 、y 、z 总是能用两个参数 u 和 v 的有理函数来表示。

§11. 曲面的切平面和法线。直纹面。曲线与曲面的切触

对应于§10所给曲面（1）、（2）、（3）、（4）的切平面方程分别为

$$(\overline{R}-\overline{r},\ \overline{r}_u,\ \overline{r}_v) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

$$Z - z = p(X-x) + q(Y-y),$$

其中 $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$，$q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$，

$$(X-x)F_x + (Y-y)F_y + (Z-z)F_z = 0。$$

法线方程为：

$$\overline{R} = \overline{r} + \lambda(\overline{r}_u \times \overline{r}_v),$$

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{X-x}{-p} = \frac{Y-y}{-q} = \frac{Z-z}{1},$$

$$\frac{X-x}{F_x}=\frac{Y-y}{F_y}=\frac{Z-z}{F_z}。$$

假定曲面的参数表示为$\overline{R}=\overline{r}(u)+v\overline{\tau}(u)$，其中$\overline{r}$和$\tau$是光滑的矢函数，则称此曲面为直纹面。坐标曲线$u=$常数为直线或它的一部分，称为母线，曲线$\overline{r}=\overline{r}(u)$称为准线。如果在任一母线的所有点上曲面的切平面相同，则称这种直纹面为可展曲面，非可展直纹面称为斜直纹面。

设M为直纹面S上的某一点，$\pi=\pi(u)$是过点M的直线，使参数u具有某一增量$\triangle u$，我们将到另一直母线$\pi'=\pi'(u+\triangle u)$。设NN'是直线π和π'的公垂线，如果当$\triangle u\to 0$时，点N沿直线π趋向于某个极限位置，那么称这个极限点为母线π上的腰点。直纹面S上所有腰点的集合一般构成曲线，这曲线称为腰曲线，直纹面的腰曲线方程为

$$\overline{\rho}=\overline{r}(u)-\frac{d\overline{r}\cdot d\overline{\tau}}{(d\tau)^2}\overline{\tau}(u)。$$

设曲线

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\qquad(1)$$

与曲面

$$F(x,y,z)=0\qquad(2)$$

具有公共点$M(t_0)$。观察函数

$$\Phi(t)=F(x(t),y(t),z(t))。$$

当点$M(t)$沿曲线（1）趋向于点$M(t_0)$时，$\Phi(t)$是$t\to t_0$时的无穷小量。若这个值关于$t-t_0$为$k+1$阶无穷小，则称曲线（1）与曲面（2）有k阶切触。

568. 证明，如果曲面上的直线过曲面的点M，则曲面在

点M的切平面含该直线。

569. 在曲面

$x = u + \cos v, \quad y = u - \sin v, \quad z = \lambda u$

上给定一点M($u = 1$, $v = \pi/2$),

1) 求曲线 $u = 1$, $v = \pi/2$ 在点M上的切线和法平面方程。

2) 求曲线 $u = 1$ $v = \pi/2$ 间的角度。

3) 证明,曲线 $u = \sin v$ 在点M的切线就是曲线 $u = 1$ 在同一点的切线。

570. 证明,螺旋线的切线曲面在任意点的法线与轴夹定角。

571. 求曲面

$x = 2u - v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 - v^3$

在点M(3, 5, 7) 的切平面方程。

572. 求曲面

$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = uv$

在点M($u = 2$, $v = 1$) 的切平面和法线的方程。

573. 求曲面

$x = u, \quad y = u^2 - 2uv, \quad z = u^3 - 3u^2 v$

在点M(1, 3, 4) 的切平面和法线的方程。

574. 已知曲面

$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u,$

求曲面在点M ($u = 2$, $v = \pi/4$) 的切平面和法线的方程及曲线 $u = 2$ 在点M的切线方程。

575—578. 求下列曲面在所给点的切平面和法线的方程。

(575) $z = x^3 + y^3$在点M（1，2，9）。

(576) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$在点M（3，4，12）。

(577) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$在点M（3，1，-1）。

(578) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$在点M（$x_0$，$y_0$，$z_0$）。

579．求伪球面

$x = a\sin u\cos v$，$y = a\sin u\sin v$，

$z = a(\ln\mathrm{tg}(\frac{u}{2}) + \cos u)$的切平面方程。

580．求正螺面

$x = u\cos v$，$y = u\sin v$，$z = av$

的切平面和法线的方程，讨论法线沿坐标曲线移动时的动态。

581．求园环面

$x = (7 + 5\cos u)\cos v$，$y = (7 + 5\cos u)\sin v$，$z = 5\sin u$。

当$\cos u = \frac{3}{5}$，$\cos v = \frac{4}{5}$（$0 < u$，$v < \frac{\pi}{2}$）时，

在点M（u，v）的切平面方程。

582．求曲面$xyz = 1$的与平面$x + y + z - 3 = 0$平行的切平面。

583．证明曲面$xyz = a^3$的切平面与三个坐标平面形成的四面体的体积是常数。

584．证明：锥面在任意点的切平面均过它的顶点。

585．证明：曲面$z = x^3 + y^3$在点（α，$-\alpha$，0）的所有切平面形成面束。

586．在园环面

$x = (a + b\cos u)\cos v$，$y = (a + b\cos u)\sin v$，$z = b\sin u$上求一点，使曲面在该点的法线垂直于平面$Ax +$

$By+Cz+D=0$

587. 已知曲面$x^n+y^n+z^n-d^n=0$和其上一点$M(a, b, c)$（a, b, c, d为正数）。证明：如果在点M的切平面分别交轴Ox、Oy、Oz于点A，B，C，则

$$\frac{a}{|\overline{OA}|}+\frac{b}{|\overline{OB}|}+\frac{c}{|\overline{OC}|}=1。$$

588. 证明曲面$f(x-az, y-bz)=0$在任意点的切平面平行于定方向。

589. 证明管状曲面（参看562题）的切平面与准线的切线平行，而准线的法线也是曲面的法线。

590. 证明曲面

$$z=x\varphi(y/x)$$

的切平面过坐标原点。

591. 证明平移曲面

$$\overline{r}=\overline{r}_1(u)+\overline{r}_2(v)$$

沿每条曲线$u=$常数或$v=$常数的切平面与某直线平行。

592. 曲面S在法线上从曲面点起截取定长的线段，这些线段的终点形成的曲面S′称为曲面S的平行曲面，将定义中所说的线段的两端看作曲面S和S′的对应点。

证明：1）平行曲面S和S′在对应点的切平面平行；2）平行性的性质是相互的（即如果S′与S平行，则S与S′平行）。

593. 设曲面是曲线$\overline{r}=\overline{r}(s)$的切线形成的图形的一部分。写出曲面在任意点的切平面方程。在切点沿曲面的直母线移动时，讨论切平面的动态。

594. 证明：曲面 $z = tg(xy)$ 和 $x^2 - y^2 = a$ 在它们的交点处正交。

595—597. 证明下列曲面族两两正交（λ、μ、ν 是曲面族参数）。

(595). $4x + y^2 + z^2 = \lambda$, $y = \mu z$, $y^2 + z^2 = \nu e^x$。

(596). $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$, $x^2 + y^2 + z^2 = \mu y$,
$x^2 + y^2 + z^2 = \nu z$。

(597). $xy = \lambda z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = \mu$,
$x^2 + y^2 + z^2 = \nu(x^2 - y^2)$。

598. 证明：曲面

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(v) + au$$

在曲线 $v = c$ 的任意点的切平面均过定直线。

599. 证明：如果曲面的所有法线过一定点，则这个曲面是球面或球面的一部分。

600. 证明旋转曲面的法线与经线的主法线重合并与旋转轴相交。

601. 如果曲面的所有法线均交于同一条直线，则此曲面是旋转曲面，试证之。

602. 证明直纹面 $\overline{R} = \overline{r}(u) + v\overline{\tau}(u)$ 为可展曲面的充要条件是

$$(\overline{r}', \overline{\tau}, \overline{\tau}') = 0。$$

603. 证明与可展曲面平行的曲面同样是可展曲面。

604. 证明任何一个可展曲面可以划分为下列部分：

1）平面的一部分；

2）柱面的一部分；

3）锥面的一部分；

4）某非平面曲线的切线曲面的一部分，在最后一种情况下该曲线称为脊线。

605．设S是604题中第4）类可展曲面，证明曲面S在任意点的切平面与脊线在相应点的密切面重合。

606．所有母线都与被称为准平面的某平面平行的斜直纹面称为卡他朗曲面。证明：直纹曲面$\overline{r}=\overline{\rho}(u)+v\overline{e}(u)$是卡他朗曲面的充要条件是

$$(\overline{e}, \overline{e}', \overline{e}'')=0, \quad \overline{e}''\neq 0。$$

607—610．求下列曲面的腰曲线：

(607)正螺面。

(608)旋转单叶双曲面。

(609)挠曲线的付法线曲面。

(610)挠曲线的主法线曲面。

611．证明在斜直纹面一条母线的各点所引曲面的法线形成的曲面是双曲抛物面或它的一部分。

612．证明曲线$yz=x$，$xz=y+1$与曲面$z=xy$在点M（0，－1，0）具有二阶切触。

613．求曲线

$$x=t^3, \quad y=t^3+2t, \quad z=t^2$$

与曲面　$x^2+y^2=x(y+z)$

在坐标原点的切触阶。

614．证明与二次曲面至少有二阶切触的直线完全位于该曲面上。

615．证明：如果一曲线在每个点上与密切面至少有三阶切触，则此曲线是平面曲线。

616．设曲线L与曲面S在点M_0有n阶切能，曲线L′是

曲线L按某一方向在S上的投影，这方向不在点M_0处S的切平面内，证明曲线L′与L在点M_0处也有n阶切触。

§12. 曲面族. 包络面

设

$$F(x, y, z)=C \quad (1)$$

是单参数曲面族的方程。满足方程组

$$F(x,y,z,C)=0, \quad \partial_C F(x,y,z,C)=0 \quad (2)$$

的所有点的集合称为族（1）的判别曲面。

一个曲面在它的每一点与族（1）中某个曲面相切（即与它具有公共点，且在这点有公共的切平面），则称此曲面为族（1）的包络。判别曲面成为曲面的部分是包络面。族（1）的包络面与族中某个确定的曲面的切点一般形成曲线。该曲线称为特征线，并由方程组（2）以对应于所考察的曲面的固定的C值给出。

满足方程组

$$F(x,y,z,C)=0, \quad \partial_C F(x,y,z,C)=0,$$
$$\partial^2_{CC} F(x,y,z,C)=0$$

的点的集合称为包络面的脊线，如果特征线的集合具有包络，则这个包络属于脊线。

设

$$F(x,y,z,C_1C_2)=0 \quad (3)$$

是双参数曲面族的方程，方程组

$$F(x,y,z,C_1,C_2)=0, \partial_{C_1} F(x,y,z,C_1,C_2)$$

$=0$，$\Phi_{C_2}F(x,y,z,C_1,C_2)=0$
的解的集合称为族（3）的判别曲面。族（3）的包络与上述一样定义。

617—619．求曲面族的包络：

(617) $x^2+y^2+(z-C)^2-1=0$。

(618) $x^2+C^2y+z-2C=0$。

(619) $(x-C)^2+(y-C)^2+(z-C)^2-C^2=0$

$(C\neq 0)$

620．试举一曲面族例子，使其判别曲面为一曲线。

621．试举一曲面族例子，使其判别曲面为一点。

622．求球面族

$$(x-C)^2+y^2+z^2-1=0$$

的包络和特征线，包络的脊线存在吗？

623．以椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=0$$

平行于对称轴之一的所有弦为直径建立球面族，求这个球面族的包络，对于双曲线解同样问题。

624．求平面族

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha+z=b\alpha \quad（其中 b=常数，$$
α 为参数）

的包络的脊线。

625．求平面族的包络，这个平面族的每一个平面与坐标平面形成的四面体体积为V。

626．求球面族的方程，使这球面族的包络是不包含顶点的锥面

$$x^2+y^2=a^2z^2 \qquad (z \neq 0)。$$

627．求半径为定长的球面族的包络，球面的中心位于已知曲线 $\overline{\rho}=\overline{\rho}(s)$ 上（管状曲面）。

628．求半径为 a，中心在圆周

$$x^2+y^2=b^2,\quad z=0$$

上的球面族的包络，特征线和脊线。

629．求曲面族

$$[(x-C)^2+(y-R)^2+z^2-R^2]\times$$
$$[(x-C)^2+(y+R)^2+z^2-R^2]=0$$

$(y^2+z^2\neq 0)$ 的包络，特征线和脊线。

630．求空间曲线的密切面族的包络和特征线，其包络的脊线存在吗?

631．求空间曲线的法平面族的包络及其特征线和脊线。

632．求空间曲线的从切面族的包络及其特征线和脊线。

633．求顶点在坐标原点并与平面 $z=0$ 相切的相同的圆锥（轴截线交角等于 2α）形成的圆锥族的包络。

634．证明可展曲面且仅有可展曲面是单参数平面族的包络。

635．可展曲面 σ 与平行平面族相交，证明所有这些截线的渐缩线也在一个可展曲面上。

636．求定半径为 a，球心在平面 $z=0$ 上的球面族的包络。

637．若某个曲面的所有切平面与曲面沿曲线相切，则这些曲线是直线或直线的一部分。试证之。

638．求平面族的包络，这些平面到 n 个定点的距离之和为常数。

§ 13。第一二次形式

在曲面的每个切空间中由R^3中的数量积诱导的数量积，称为R^3中的曲面S的第一基本形式，用符号φ_1表示。这样，形式φ_1将曲面(在同一点的)切空间的每一对矢量$\overline{h}$，$\overline{p}$对应到数$\varphi_1(\overline{h},\overline{p})=\overline{h}\cdot\overline{p}$。对应于$\varphi_1$的二次形式称为曲面的第一二次形式并用符号$ds^2$（与$\varphi_1$一样）表示。双线性形式$\varphi_1$的确定等价于二次形式$ds^2$的确定。对于曲面的切矢$\overline{h}$有$ds^2(\overline{h})=\varphi_1(\overline{h},\overline{h})=\overline{h}\cdot\overline{h}=|\overline{h}|^2$。若$(U,\overline{r})$是曲面的参数表示，$\partial_u\overline{r}$，$\partial_v\overline{r}$是相应的活动基，则函数

$$E(u,v)=\partial_u\overline{r}(u,v)\cdot\partial_u\overline{r}(u,v),$$

$$F(u,v)=\partial_u\overline{r}(u,v)\cdot\partial_v\overline{r}(u,v),$$

$$G(u,v)=\partial_v\overline{r}(u,v)\cdot\partial_v\overline{r}(u,v),$$

称为第一二次（基本）形式的系数。如果$\overline{h}$，$\overline{p}$是曲面在点$\overline{r}(u,v)$的切矢量且

$$\overline{h}=h_1\partial_u\overline{r}(u,v)+h_2\partial_v\overline{r}(u,v),$$

$$\overline{p}=p_1\partial_u\overline{r}(u,v)+p_2\partial_v\overline{r}(u,v)$$

（即$(h_1 h_2)$是矢量$\overline{h}$在活动基下的坐标，而$(p_1 p_2)$是矢量$\overline{p}$在活动基下的坐标），那么

$$ds^2(\overline{h})=E(u,v)h_1^2+2F(u,v)h_1h_2+G(u,v)h_2^2,$$

$$\varphi_1(\overline{h},\overline{p})=E(u,v)h_1p_1+F(u,v)(h_1p_2+h_2p_1)+G(u,v)h_2p_2。$$

通常将ds^2记为

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

在此所指的是 $du(\overline{h}) = h_1$, $dv(\overline{h}) = h_2$

如果曲面上的曲线由内部方程 $u = u(t)$, $v = v(t)$ 给出，则该曲线的弧长根据公式

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(u(t),v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t),v(t)) u'(t)v'(t) + G(u(t),v(t))(v'(t))^2}\,dt,$$

求得。如果φ是曲面上两曲线(由内部方程 $u = u_1(t), v = v_1(t)$ 和 $u = u_2(t), v = v_2(t)$ 给出) 间在具有曲线坐标 $(u_0, v_0) = (u_1(t_0), v_1(t_0)) = (u_2(t_0), v_2(t_0))$ 的公共点处的夹角，则

$$\cos\varphi = \frac{1}{d_1 d_2}(E(u_0,v_0)u_1'(t_0)u_2'(t_0) + F(u_0,v_0)(u_1'(t_0)v_2'(t_0) + u_2'(t_0)v_1'(to)) + G(u_0,v_0)v_1'(t_0)v_2'(t_0)),$$

其中

$$d_1 = \sqrt{E(u_0,v_0)(u_1'(t_0))^2 + 2F(u_0,v_0)u_1'(t_0)v_1'(t_0) + G(u_0,v_0)(v_1'(t_0))^2},$$

$$d_2 = \sqrt{E(u_0,v_0)(u_2'(t_0))^2 + 2F(u_0,v_0)u_2'(t_0)v_2'(t_0) + G(u_0,v_0)(v_2'(t_0))^2}。$$

曲面上的闭区域D是闭区域D′关于矢函数 $\overline{r}$ 的象（即 $\overline{r}(D') = D$），它的面积σ根据公式

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{EG - F^2}\,du dv$$

计算。由曲面S到曲面Q的微分同胚 f 称为等距，如果在曲

面S上任一曲线L在点M和N间的弧长等于在曲面Q上曲线f(L)在对应点间的弧长。如果对于所有点$M\in S$存在点M在曲面S上的邻域到曲面Q的某一部分的等距，则称曲面S可贴合在曲面Q上。

由曲面S到曲面Q的微分同胚称为保角映射，如果在曲面S上任意两曲线间的夹角等于在曲面Q上对应曲线间的夹角。

设$(U,\ \overline{r}_1)$和$(U,\ \overline{r}_2)$分别为曲面S和Q的参数表示，

$$f:\ \overline{r}_1(U)\to\overline{r}_2(U),\quad \overline{r}_1(u,\ v)\mapsto\overline{r}_2(u,\ v)$$

是将具有同一曲线坐标的点相对应的映射。映射f是等距（保角映射）的充要条件是曲面关于上述参数表示的第一二次形式的系数相同（对应地成比例）。

639—649. 求下列旋转曲面的第一二次形式

(639) $x=f(u)\cos v,\ y=f(u)\sin v,\ z=g(u)$——以Oz轴为旋转轴的曲面。

(640) $x=R\cos u\cos v,\ y=R\cos u\sin v,\ z=R\sin u$——球面。

(641) $x=a\cos u\cos v,\ y=a\cos u\sin v,\ z=c\sin u$——旋转椭圆面。

(642) $x=a\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\ y=a\,\mathrm{ch}\,u\sin v,\ z=c\,\mathrm{sh}\,u$——旋转单叶双曲面。

(643) $x=a\,\mathrm{sh}\,u\cos v,\ y=a\,\mathrm{sh}\,u\sin v,\ z=c\,\mathrm{ch}\,u$——旋转双叶双曲面。

(644) $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=u^2$——旋转抛物面。

(645) $x=R\cos v, y=R\sin v, z=u$——圆柱面。

(646) $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=ku\ (u\neq0)$——不包含顶点的圆锥面。

(647) $x=(a+b\cos u)\cos v$，
$y=(a+b\cos u)\sin v$，$z=b\sin u$——圆环面。

(648) $x=a\,\mathrm{ch}(u/a)\cos v$，$y=a\,\mathrm{ch}(u/a)\sin v$，
$z=u$——悬链面。

(649) $x=a\sin u\cos v$，$y=a\sin u\sin v$，

$z=a(\ln\mathrm{tg}(u/2)+\cos u)\ (u\neq\frac{\pi}{2})$——伪球面。

650。求正螺面

$x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=av$

的第一二次形式。

651。求一般螺面

$x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=f(u)+av$

的第一二次形式。

652。曲面S分别是曲线$\overline{r}=\overline{r}(u)$（u为自然参数）的1）切线，2）主法线，3）付法线
形成的曲面，求曲面S的第一二次形式。

653。求曲面

$z=z(x, y)$

的第一二次形式。

654。试指出下列二次形式中哪些不能作为曲面的第一二次形式：

1）$ds^2=du^2+4dudv+dv^2$；

2）$ds^2=du^2+4dudv+4dv^2$；

3） $ds^2=du^2-4dudv+6dv^2$；

4） $ds^2=du^2+4dudv-2dv^2$。

655. 在改变成新的曲线坐标系时，求曲面第一二次形式的系数和表达式$H=\sqrt{EG-F^2}$的变换公式。

656. 证明：旋转曲面在适当选择曲线坐标系，其第一二次形式能化为：

$$ds^2=du^2+G(u)dv^2。$$

657. 如果曲面的一族坐标曲线被另一族的两条曲线截得等长的线段，则曲面的坐标曲线网称为切比雪夫网。证明：曲面的坐标曲线网是切比雪夫网当且仅当

$\partial_v E=0$，$\partial_v G=0$。

658. 设曲面的第一二次形式为：

$$ds^2=du^2+2Fdudv+dv^2,$$

此时能说出曲线坐标是什么？

659. 试将球面、环面、悬链面和伪球面的第一二次形式化为：

$$ds^2=d\tilde{u}^2+\tilde{G}(\tilde{u})d\tilde{v}^2$$

660. 如果曲面的的第一二次形式为

$$ds^2=A(u,v)(du^2+dv^2),$$

曲面的曲线坐标系称为等温坐标系，求伪球面的等温坐标系。

661. 求双曲抛物面

$$z=axy$$

的直母线间的交角。

662. 证明：若抛物面$z=a(x^2+y^2)/2$和$z=axy$上

各有一区域，它们投影到xOy平面的同一区域上，则两曲面上这两区域的面积相等。

663. 求与旋转曲面的经线交成定角α的曲线的方程（斜驶线）。

664. 求球面上斜驶线的方程。

665. 证明：如果曲面上的曲线族的微分方程是$A du + B dv = 0$，则正交轨线（即与已知曲线交成直角的曲线）的方程是：

$$(BE - AF)du + (BF - AG)dv = 0。$$

666. 求锥面直母线的正交轨线。

667. 某曲线的切线曲面为S，求曲面S直母线的正交轨线。

668. 求与667题中曲面S的直母线交成定角α的曲线的微分方程。

669. 求在曲面上的曲线族$\varphi(u, v) =$常数的正交轨线的微分方程。

670. 求在球面

$$x = R\cos u\cos v，\quad y = R\cos u\sin v，\quad z = R\sin u$$

上的曲线族$u + v =$常数的正交轨线。

671. 求在斜螺面

$$x = u\cos v，\quad y = u\sin v，\quad z = u + v$$

上曲线族$u = Ce^{v}$的正交轨线。

672. 曲线族$v = u^{2} + \alpha$（α为参数）在圆锥面

$$x = u\cos v，\quad y = u\sin v，\quad z = u$$

上，求它们的正交轨线。

673. 求斜螺面

$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = u + v$

在采用 v = 常数和它们的正交轨线为坐标曲线时的方程。

674. 求曲面上由微分方程

$P(u,v)du^2 + Q(u,v)dudv + R(u,v)dv^2 = 0$

确定的两族曲线正交的条件。

675. 证明在正螺面

$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = av$

上微分方程

$du^2 - (u^2 + a^2)dv^2 = 0$

给出正交网。

676. 在曲面 $z = axy$ 上，求它的直母线的正交轨线。

677. 证明：坐标曲线的二等分角轨线的微分方程是

$\sqrt{E}du \pm \sqrt{G}dv = 0$。

678. 求正螺面

$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = av$

上坐标曲线的二等分角轨线方程。

679. 求球面

$x = a\cos u\sin v,\quad y = a\sin u\sin v,\quad z = a\cos v$

上纬线和经线的二等分角轨线方程。

680. 求曲面 $z = axy$

上直母线间的二等分角轨线方程。

681. 已知曲面

$x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = uv\quad (|u| + |v| \neq 0)$，

1）求第一二次形式。

2）求曲线 $u = 2$，$v = 1$，$v = au$ 的弧长微分。

3）计算曲线 $v=au$ 在它与曲线 $u=1$，$u=2$ 交点间的弧长。

682。求正螺面

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=av$$

上曲线 $u+v=0$，$u-v=0$ 的交角。

683。设曲面有

$$ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2,$$

求它上面的曲线三角形 $u=\pm av^2/2$，$v=1$ 的周长和内角。

684。在第一二次形式为

$$ds^2=du^2+\operatorname{sh}^2 u\,dv^2$$

的曲面上，求曲线 $u=v$ 在点 $M_1(u_1,v_1)$ 和 $M_2(u_2,v_2)$ 间的弧长。

685。设曲面的第一二次形式为

$$ds^2=du^2+dv^2,$$

求它上面的曲线 $v=2u$ 和 $v=-2u$ 之间的夹角。

686。求曲面

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=u^2$$

上曲线 $v=u+1$ 和 $v=3-u$ 之间的夹角。

687。在正螺面

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=av$$

上有一曲线

$$v=\ln(u\pm\sqrt{u^2+a^2})+C,$$

求此曲线在两点 $M_1(u_1,v_1)$ 和 $M_2(u_2,v_2)$ 间的弧长。

688。在伪球面

$$x=a\sin u\cos v,\quad y=a\sin u\sin v,$$

$$z = a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$$

上有两曲线族

$$v = \pm a \ln \operatorname{tg}(u/2) + c,$$

求每族的曲线在两点$M_1(u_1, v_1)$和$M_2(u_2, v_2)$间的弧长。

证明一曲线族的所有曲线在另一族的两给定曲线之间的弧长都是相同的。

689. 在球面上有一直角三角形，它的各边是球面大圆的弧，求：

1）三角形各边之间的关系式

2）三角形的面积。

690. 求正螺面

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = av,$$

上由曲线$u=0$，$u=a$，$v=0$，$v=1$

围成的四边形的面积。

691. 在第一二次形式为

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

的曲面上，求曲边三角形$u = \pm av$，$v=1$的面积。

692. 求由维维安尼曲线环围成的凸形球面区域的面积。

693. 由具有公共端点的两个大圆之半圆形成的图形称为球面二角形，求在顶点具有φ_0角的球面二角形的面积S。

694. 证明任何柱面可贴合在平面上。

695. 证明任何锥面可贴合在平面上。

696. 证明曲线的切线曲面可贴合在平面上。

697. 证明正螺面可贴合在悬链面上。

698. 第一二次形式为

$$ds^2=(f(u)+g(v))(du^2+dv^2)$$

的曲面称为李乌维尔曲面，证明可贴合在旋转曲面上的曲面是李乌维尔曲面。

699. 证明任何一个旋转曲面可局部地等角映射到平面上。

700. 一个曲面到另一个曲面的映射称为等面映射，如果在这个映射下对应区域的面积相等。证明：如果一个曲面到另一个曲面的映射是等角和等面的，则这个映射也是等距映射。

§14. 球面映射. 第二次形式

设S是定向曲面，它的定向由垂直曲面的单位矢量场$\overline{n}$确定。曲面S到球面S^2的映射称为曲面S的球面（或高斯）映射，它将点M∈S对应到球面上径矢为$\overline{n}$（M）的点M′，此时若将切矢量（M，$\overline{h}$）与（M′，$\overline{h}$）看作一样，就可将切空间T_MS与切空间$T_{M'}S^2$可看作一样。球面表示是光滑的，它在点M的微分可看为空间T_MS的线性变换，此微分称为曲面（在点M）的基本算子，并用符号$\mathscr{A}$表示。借助曲面S在每个切矢量空间的基本算子，根据法则$\varphi_2(\overline{h},\overline{p})=-\mathscr{A}(\overline{h})\cdot\overline{p}=-\overline{h}\cdot\mathscr{A}(\overline{p})$可确定双线性对称形式$\varphi_2$，此形式称为第二基本形式。相应于$\varphi_2$的二次形式称为曲面的第二二次形式，并同样也用$\varphi_2$表示。如果（U，$\overline{r}$）是曲面的参数表示，且

$$\overline{n}=\frac{\partial_u\overline{r}\times\partial_v\overline{r}}{|\partial_u\overline{r}\times\partial_v\overline{r}|},$$

那么

$$\mathscr{A}(\partial_u\overline{r})=\partial_u\overline{n}\qquad \mathscr{A}(\partial_v\overline{r})=\partial_v\overline{n},$$

且对于切矢量 $\overline{h}=\partial_u\overline{r}h_1+\partial_v\overline{r}h_2$ 和 $\overline{p}=\partial_u\overline{r}p_1+\partial_v\overline{r}p_2$

有

$$\mathscr{A}(\overline{h})=\partial_u\overline{n}h_1+\partial_v\overline{n}h_2$$

和 $\varphi_2(\overline{h},\ \overline{p})=-\partial_u\overline{n}\cdot\partial_u\overline{r}h_1p_1-\partial_u\overline{n}\ \partial_v\overline{r}h_1P_2$
$-\partial_v\overline{n}\cdot\partial_u\overline{r}h_2p_1-\partial_v\overline{n}\cdot\partial_v\overline{r}h_2p_2$。

函数

$$L(u,v)=-\partial_u\overline{n}(u,v)\cdot\partial_u\overline{r}(u,v)$$
$$=\overline{n}(u,v)\cdot\partial_{uu}{}^2\overline{r}(u,v)$$
$$=\frac{(\partial_u\overline{r},\partial v\overline{r},\ \partial_{uu}{}^2\overline{r})}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M(u.v)=-\partial_u\overline{n}(u,v)\partial_v\overline{r}(u,v)=-\partial_v\overline{n}(v,v)\cdot\partial u\overline{r}(u,v)$$
$$=\overline{n}(u,v)\cdot\partial uv^2\overline{r}(u,v)=\frac{(\partial_v\overline{r},\partial_v\overline{r},\partial_{uv}{}^2\overline{r})}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N(u,\ v)=-\partial_v\overline{n}(u,v)\cdot\partial_v\overline{r}(u,v)$$
$$=\overline{n}(u,v)\cdot\partial_{vv}{}^2\overline{r}(u,v)$$
$$=\frac{(\partial_u\overline{r},\ \partial_v\overline{r},\ \partial_{vv}{}^2\overline{r})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

称为曲面的第二二次形式的系数。公式

$$\varphi_2(\overline{h},\ \overline{p})=Lh_1p_1+M(h_1p_2+h_2p_1)$$
$$+Nh_2p_2$$

成立。通常将第二二次形式写为：

$$\varphi_2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2。$$

在曲面的活动基$(\partial_u \overline{r}, \partial_v \overline{r})$下基本算子（线性变换）$\mathscr{A}$的矩阵为

$$\frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} FM-GL & FN-GM \\ FL-EM & FM-EN \end{bmatrix}。$$

在曲面的每一点可以确定基本算子$\mathscr{A}$的（实的）特征值λ_1、λ_2和彼此正交的单位特征矢量$\overline{e}_1$、$\overline{e}_2$，使$\mathscr{A}(\overline{e}_1) = \lambda_1 \overline{e}_1$，$\mathscr{A}(\overline{e}_2) = \lambda_2 \overline{e}_2$。在曲面的每个切平面内由矢量$\overline{e}_1$和$\overline{e}_2$确定的方向称为主方向。若在曲面的一点基本算子是零，即$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 0$，该点称为平点。

若在曲面的一点基本算子是相同，即$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$，该点称为圆点（或脐点）。

曲面上的曲线在点M的曲率矢量$\kappa\overline{\beta}$在曲面的由矢量$\overline{n}(M)$定向的法线上的投影值称为曲面上曲线在点M的法曲率κ_n。如果在曲面上的两曲线在点M有公共切线，那么它们在该点的法曲率相同，因此在点M的法曲率能看为在点M处切平面上方向的函数，并称它为曲面在该方向的法曲率。在点M具有切矢量$\overline{h}$的曲线其法曲率根据公式

$$\kappa_n(\overline{h}) = \frac{\varphi_2(\overline{h})}{\varphi_1(\overline{h})}$$

计算。

如果过曲面在点M的法线作平面，那么在点M的邻域内此平面与曲面的截线是一曲线，此曲线称为法截线。法截线的曲率与它的法曲率的模相等，曲面上曲线的曲率κ和与已知曲线具有公共切线的法截线的曲率κ_0用公式

$$\kappa_0 = \kappa \mid \cos\theta \mid$$

联系，其中θ是矢量$\overline{n}$与曲线主法线矢量$\overline{\beta}$间的夹角。曲面在主方向的法曲率称为主曲率，以符号κ_1和κ_2表示。

有公式

$$\kappa_1 = -\lambda_1 \qquad \kappa_2 = -\lambda_2$$

成立，且κ_1、κ_2是方程

$$(EG - F^2)\kappa^2 - (EN + GL - 2FM)\kappa + LN - M^2 = 0$$

的根。如果切矢量$\overline{h}$与主方向的矢量$\overline{e}_1$间的夹角为φ，则

$$\kappa_n(\overline{h}) = \kappa_1\cos^2\varphi + \kappa_2\sin^2\varphi,$$

这就是欧拉公式。

在一点的全曲率（或高斯曲率）是根据公式

$$K = \det\mathscr{A} = \kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

确定。曲面在一点的中曲率是根据公式

$$H = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathscr{A} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

确定。

如果$K > 0$，则曲面点称为椭圆点；如果$K < 0$，则曲面点称为双曲点；如果$K = 0$，则曲面点称为抛物点。

如果从曲面的某点M对每一法截线的切线截取一线段，使它等于这截线的曲率半径的平方根，则得到的一曲线，此曲线称为杜潘标线。

701—714。求下列曲面在球面映射下所映到的球面上点的集合：

(701) 球面。

(702) 椭圆面。

(703) 椭圆抛物面。

(704) 旋转单叶双曲面。

(705) 旋转双叶双曲面。

(706) 椭圆柱面。

(707) 抛物柱面。

(708) 双曲柱面。

(709) 圆锥面。

(710) 悬链面。

(711) 伪球面。

(712) 环面。

(713) 柱面 $y = x^3$。

(714) 正螺面。

715. 设曲面S是空间曲线 $\overline{r} = \overline{r}(t)$的切线曲面的一部分。证明曲面S在球面映射下的象是球面上的一条曲线。

716—726. 求下列旋转曲面的第二二次形式：

(716) $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $z = g(u)$,以Oz为旋转轴的旋转曲面。

(717) $x = R\cos u\cos v$, $y = R\cos u\sin v$, $z = R\sin u$——球面。

(718) $x = a\cos u\cos v$, $y = a\cos u\sin v$, $z = c\sin u$——旋转椭圆面。

(719) $x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v$, $y = a\,\mathrm{ch}\,u\sin v$, $z = c\,\mathrm{sh}\,u$—旋转单叶双曲面。

(720) $x = a\,\mathrm{sh}\,u\cos v$, $y = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v$, $z = c\,\mathrm{ch}\,u$—旋转双叶双曲面。

(721) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$—旋转抛物

面。

(722) $x=R\cos v, y=R\sin v,\ z=u$—圆柱面。

(723) $x=u\cos v, y=u\sin v,\ z=ku\ (u\neq 0)$—圆锥面。

(724) $x=(a+b\cos u)\cos v, y=(a+b\cos u)\sin v,\ z=b\sin u$—环面。

(725) $x=a\ \mathrm{ch}(\frac{u}{a})\cos v,\ y=a\ \mathrm{ch}(\frac{u}{a})\sin v,$

$z=u$—悬链面。

(726) $x=a\sin u\cos v,\ y=a\sin u\sin v,$

$z=a\left(\ln \mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}\right)+\cos u\right)$—伪球面。

727。求正螺面

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=av$$

的第二二次形式。

728。证明：对于平面任意选取曲线坐标，其第二二次形式恒等于零。

729。证明：如果曲面 $z=f(x,y)$ 的第二二次形式恒等于零，则曲面是平面或平面的一部分。

730。证明：悬链面（530题）的方程能表示为：

$$x=\sqrt{u^2+a^2}\cos v,\ y=\sqrt{u^2+a^2}\sin v,$$

$$z=a\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)。$$

求悬链面在所给参数表示下的第二二次形式，并计算坐标曲线的法曲率。

731。设曲面S是空间曲线的切线曲面，求曲面 S 的主曲率。

732．求双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

在顶点的主曲率。

733．求正螺面

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=av$$

的主方向和主曲率。

734．证明正螺面的主方向是母线与螺旋线的方向的角平分线方向。

735．求曲面 $z=xy$ 在点M（1，1，1）的主曲率。

736．求曲面

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

在点M（0，0，0）的主曲率。

737．证明在曲面

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=\lambda u。$$

的任意点的主法截线之一是直线。

738．求曲面 $y=\frac{x^2}{2}$ 的法截线的曲率：1）在任意点；2）在平面 $z=k$ 截曲面所得的曲线的点上，沿这些曲线的切线方向；3）在点M（2，2，4）处沿曲线 $y=\frac{x^2}{2}$，$z=x^2$ 的切线方向。

739．在曲面 $x=u^2+v^2, y=u^2-v^2, z=uv$ 上有一点P（$u=1$，$v=1$），

1）求曲面在P点的主曲率；

2）求所给点的主法截线的切线 PT_1、PT_2 的方程；

3）求过曲线$v=u^2$的切线的法截线在点P的曲率。

740．已知曲面

$$z=2x^2+\frac{9}{2}y^2。$$

1）求在坐标原点的杜潘标线方程；

2）法截线的切线与Ox轴夹45°角，求这法截线在坐标原点的曲率半径。

741．在曲面点M的切平面上作彼此夹角为$\frac{\pi}{n}$的n条直线，证明

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_n}\right)=H,$$

其中$\frac{1}{r_i}$是曲面上与已知直线相切的曲线的法曲率。

742．过旋转椭园面的顶点M沿曲面作所有可能的曲线，求由这些曲线在点M的曲率中心所组成的图形。

743．证明：可展曲面的特征是，曲面在所有点的全曲率等于零。

744．求曲面，使其第二二次形式是完全平方。

745．证明：旋转曲面的主曲率半径之一等于夹在曲面与旋转轴之间的法线线段长。

746．求639—649题所给的曲面的全曲率，按作为主曲率的乘积来求（不计算二次形式）。

747．如果绕准线旋转抛物线，则得到的曲面具有$|R_1|=2|R_2|$，其中R_1和R_2是主曲率半径。试证之。

748．求曲面关于等温坐标全曲率的表示式。

749．求曲面关于半测地线坐标的全曲率表达式，所谓半

测地线坐标是曲面的第一二次形式为：

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2。$$

750. 求第一二次形式为

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2$$

的曲面的全曲率。

751. 求抛物面

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

的全曲率。

752. 证明：如果曲面的第一二次形式为：

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2,$$

则曲面的全曲率的计算公式为

$$K = \frac{\partial_{uv}^2 \omega}{\sin\omega}。$$

753. 求曲面方程为

$$F(x, y, z) = 0$$

的曲面的全曲率。

754. 证明：第一二次形式为

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c^2)^2}$$

的曲面的全曲率是常数。

755. 设曲面S是空间曲线的主法线（付法线）曲面，求曲面S的全曲率。

756. 求正螺面

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av。$$

的全曲率和中曲率，在什么曲线上全曲率为常数？

757. 求曲面 $z = f(x, y)$ 的全曲率和中曲率。

758．求旋转曲面 $z=f(\rho)$（其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$）的全曲率和中曲率。

759．求半径为 a 的圆柱面的中曲率。

760．设曲面是由不含零曲率点的曲线 L 绕轴 l 旋转而得。如果曲线 L 凹向轴 l，则曲面由椭圆点组成；如果曲线 L 凸向轴 l，则曲面由双曲点组成，试证之。

761．求环面的椭圆点、双曲点和抛物点。

762—766．研究由下列曲线旋转而成的曲面的点的性质：

（762）正弦曲线 $y=\sin x\ (x\neq k\pi)$ 绕 Ox 轴旋转；

（763）正弦曲线 $y=\sin x\ (x\neq k\pi)$ 绕 Oy 轴旋转；

（764）曲线 $y=\ln x\ (x\neq 1)$ 绕 Ox 轴旋转；

（765）曲线 $y=\ln x$ 绕 Oy 轴旋转；

（766）双曲线 $xy=1$ 的一支 $\left(x>0,\ x\neq\sqrt{\frac{-B}{A}}\right)$ 绕直线 $Ax+By=0$ 旋转。

767—775．研究下列二次曲面的点的性质：

（767）椭圆面；

（768）单叶双曲面；

（769）双叶双曲面；

（770）椭圆抛物面；

（771）双曲抛物面；

（772）椭圆柱面；

（773）抛物柱面；

（774）双曲柱面；

（775）不包含顶点的锥面。

776．阐明曲面 $z=f(u)$（其中 $u=\sqrt{x^2-y^2}$）的点的性质。

777. 证明曲面 $x+y=z^3$ 上所有点都是抛物点。

778. 证明球面或球面的一部分是全部由圆点组成的且具有非零全曲率的唯一的连通曲面。

779. 证明曲面的点是圆点的充要条件是在这点满足条件：

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}。$$

780. 指出作旋转曲面的圆点的几何方法。

781. 正弦曲线 $y=\sin x\ (x\neq k\pi)$ 绕 Ox 轴旋转，求旋转曲面上的圆点。

782—786. 求下列曲面的圆点：

(782) 旋转椭圆面。

(783) 旋转抛物面。

(784) 椭圆抛物面。

(785) 三轴椭圆面。

(786) 双叶双曲面。

787. 证明曲面

$$x=\frac{u^2}{2}+v,\quad y=u+\frac{v^2}{2},\quad z=uv$$

上的圆点在下列曲线上：

$$u=v,\quad u+v+1=0。$$

788. 证明圆点的特点是 $H^2=K$。

789. 试给出有唯一平点的曲面。

790. 试给出平点形成曲线的曲面。

791. 证明平面或平面的一部分是全部由平点组成的唯一曲面。

§15. 共轭网和渐近曲线

在曲面上，由方程

$$f(u, v, C)=0$$

给出的单参数曲线族称为正则曲线族，如果过所考察的区域的每一点可作且仅可作族中的一条曲线。两个正则曲线族的集合称为曲面上的曲线网，若它们的曲线彼此相交但不相切。

在曲面的切平面上由矢量$\overline{h}$和$\overline{p}$确定的两个方向称为共轭方向，果如$\varphi_2(\overline{h}、\overline{p})=0$，即如果

$$Lh_1p_1+M(h_1p_2+h_2p_1)+Nh_2p_2=0,$$

其中$\overline{h}=(h_1, h_2)$，$\overline{p}=(p_1, p_2)$。

如果在每个点曲面的曲线网的两族曲线的切矢量共轭，则称这曲线网为曲面的共轭网。

由矢量$\overline{h}$确定的方向称为渐近方向，如果$\varphi_2(\overline{h}, \overline{h})=0$。渐近方向的特征是曲面沿此方向的法曲率等于零。若曲面上的曲线在每个点的切线具有渐近方向，则此曲线称为渐近曲线。渐近曲线的内部表示可作为微分方程

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

的介求得。

在由椭圆点组成的曲面上，设有渐近曲线。在由双曲点组成的曲面上，经过每一点有两条渐近曲线。在由抛物点但不是平点组成的曲面上，经过每一点有一条渐近曲线。

792. 求曲面上曲线族的微分方程，这些曲线族分别与

坐标曲线族 u = 常数和 v = 常数构成共轭网。

793. 求由微分方程

$$P(u,v)du^2+Q(u,v)dudv+R(u,v)dv^2=0$$

确定的曲面上两族曲线共轭的条件。

794. 证明在正螺面

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=av$$

上曲线 $v^2du^2-u^2dv^2=0$ 构成共轭网。

795. 求曲面上曲线族的微分方程，此曲线族与曲线族 $\varphi(u,v)=C$ 构成共轭网。

796. 证明平移平面

$$\overline{r}=\overline{r}_1(u)+\overline{r}_2(v)$$

的坐标曲线构成共轭网。

797. 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

与平面 $x+y=C$ 相交，C 为任意常数。求与这些交线构成共轭网的曲线族。

798. 在曲面 $xyz=1$ 上的点 $M(1,1,1)$ 处求与方向 $\overline{a}(1,-2,1)$ 共轭的方向。

799. 曲面上的单参数曲线族由微分方程

$$A(u,v)du+B(u,v)dv=0$$

给出，求求与这曲线族共轭的曲线族的微分方程。

800. 证明：在可展曲面上，直母线族与任意单参数曲线族共轭。

801. 在斜螺面

$$x=u\cos v,\quad y=v\sin v,\quad z=u+v$$

上，求与曲线族 $u+v=C$ 共轭的曲线。

802. 证明：曲面上的曲线为渐近曲线是当且仅当它满足下列条件之一：

1）在曲线每一点的切线是渐近方向；

2）在每一点曲线的法曲率等于零；

3）在曲线的曲率不为零的点，曲线的密切面与曲面的切平面重合。

803. 证明曲面的坐标曲线为渐近曲线的充要条件是 $N=L=0$。

804. 求伪球面的渐近曲线，证明它们构成切比雪夫网。

805. 设 L 是在曲面 Φ 上的渐近曲线，证明曲面 Φ 沿曲线 L 的单参数切平面族的特征线与曲线 L 的切线重合。

806. 求旋转曲面的渐近曲线的微分方程。

807. 求悬链面

$$x=\operatorname{ch}u\cos v,\quad y=\operatorname{ch}u\sin v,\quad z=u$$

的渐近曲线。

808. 考察环面的渐近曲线。

809. 求正螺面的渐近曲线。

810. 求单叶双曲面的渐近曲线。

811. 一直线平行 xOy 平面移动，且与 Oz 轴和曲线 $x=u$，$y=u^2$，$z=u^3$ 相交，求这直线形成的曲面的渐近曲线。

812. 证明，曲线

$$x=\frac{2}{1+t},\quad y=\frac{2}{1-t},\quad z=t$$

是曲面 $z=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$

的渐近曲线。

813. 在空间曲线的主法线曲面上，此曲线是渐近曲线，试证之。

814. 中曲率恒为零的曲面称为极小曲面。证明在极小曲面上渐近曲线网正交，即在所有点上一族的曲线与另一族曲线正交。

815. 证明：如果在曲面的某个点上中曲率等于零，则在该点的渐近方向互相垂直。

816. 证明：在平面上任一曲线都是渐近曲线；反之，若曲面上任一曲线是渐近曲线，则这曲面是平面或平面的一部分。

817. 证明：在平行已知曲面的曲面上，对应于已知曲面的渐近曲线的曲线为渐近曲线，当且仅当已知曲面为可展面。

818. 证明：曲面曲线L和它的球面映射L′在对应点有互相垂直的切线，当且仅当L是渐近曲线。

§16. 曲率线

曲面上的曲线称为曲率线，如果在曲线的每一点处它的切线具有主方向。曲率线的内部表示可从微分方程

$$\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv & F\,du+G\,dv \\ L\,du+M\,dv & M\,du+N\,dv \end{vmatrix}=0$$

求得。

经过曲面上不是平点或圆点的每一点有两条互相正交的曲率线。

819. 证明曲面上的曲线是曲率线是当且仅仅当下列条件之一成立：

1）曲线在每个点沿主方向前进；

2）曲线在每一点的法曲率等于主曲率之一；

3）曲面沿曲线的法线形成可展曲面。

820—826. 求下列曲面的曲率线：

(820) 任意柱面。

(821) 任意锥面。

(822) 任意旋转曲面。

(823) 曲面 $x=u^2+v^2$，$y=u^2-v^2$，$z=v$。

(824) 任意可展曲面。

(825) 正螺面。

(826) 椭圆抛物面。

827. 证明在平面和球面上任意曲线是曲率线。

828. 证明曲面的坐标曲线是曲率线的充要条件是 $F=M=0$。

829. 证明曲面

$x=3u-u^3+3uv^2$，$y=v^3-3u^2v-3v$，$z=3(u^2-v^2)$

上的坐标曲线是曲率线。

830. 证明斜直纹曲面的直母线不可能是曲率线。

831. 求沿着曲率线的曲面法线族的包络。

832. 证明：在一片只含有双曲点的曲面上，在每点的曲

率线是两渐近曲线的角平分线。

833. 证明：曲面S的曲率线在S的平行曲面上的对应曲线同样是曲率线。

834. 阐明在怎样的条件下，已知曲面上的正交网在曲面的平行曲面上对应为正交网。

835. 在什么条件下，椭圆面的圆截线族是曲率线族。

836. 证明：在任何曲面上都存在唯一与曲率线网重合的共轭正交网。

837. 某曲面上有一曲率线，该曲面沿此曲率线与另一曲面相交。欲使此交线亦为另一曲面的曲率线的充要条件是两曲面交成定角。试证之。

838. 证明：若曲面的曲率线是平面曲线，则曲率线的球面映射是圆。

839. 证明，在曲面的球面映射下，曲面上的曲线L和它的象L′在对应点有平行的切线，当且仅当L是曲率线。

§17. 测　地　线

曲面上的曲线称为曲面上的测地线，如果在它的每一点下列条件之一成立：

1）曲线的曲率等于零；

2）曲面的法线是曲线的主法线。

如果坐标网是正交网，则测地线内部表示的微分方程为

$$2E\frac{d^2u}{ds^2}+\partial_u E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\partial_v E\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\partial_u G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0\\
&2G\frac{d^2v}{ds^2}-\partial_v E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\partial_u G\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}\\
&+\partial_v G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0
\end{aligned}\right\}\qquad(1)
$$

设$dv\neq 0$，这个方程组能用一个方程代替：

$$
\frac{d^2u}{dv^2}+\frac{\partial_v E}{2G}\left(\frac{du}{dv}\right)^3+\left(\frac{\partial_u E}{2E}-\frac{\partial_u G}{G}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)^2
$$

$$
+\left(\frac{\partial_v E}{E}-\frac{\partial_v G}{2G}\right)\frac{du}{dv}-\frac{\partial_u G}{2E}=0。
$$

$v=$常数这条曲线是否为测地线，应该根据方程组（1）检查。

经过曲面的每一点沿已知方向可作唯一的测地线。

曲面上曲线在一点的曲率矢$\kappa\overline{\beta}$在曲面于该点的切平面上的投影的长称为曲面上曲线在该点的测地曲率。

沿已知方向的测地线的挠率称为对应于已知方向的测地挠率。如果在曲面上这样选取曲线坐标，使一族坐标曲线由测地线组成，而第二族坐标曲线由第一族曲线的正交轨线组成，而且其中一个曲线坐标就是第一族坐标曲线的弧长，则称这坐标系为半测地坐标系。在这种坐标系下，第一二次形式为：

$$
ds^2=du^2+G(u,v)dv^2。
$$

840. 证明：曲面上测地线具有以下列性质之一为特征：

1）在曲率不为零的曲线的每一点处曲面的法线是曲线的主法线；

2）在曲率不为零的曲线的每一点处曲面的法线位于曲

线的密切平面上；

3）在曲线的每一点测地曲率等于零；

4）在曲线的每一点，它的曲率等于法曲率的绝对值；

5）在曲率不为零的曲线的每一点，它的从切面与曲面的切平面重合。

841. 证明：在曲面上的任何直线都是测地线。

842. 两曲面沿曲线L相切，证明，若L是其中一个曲面上的测地线，则L也应该是另一个曲面的测地线。

843. 证明：曲面$\overline{r}=\overline{r}(u, v)$的测地线的微分方程能写成$(\overline{N}, d\overline{r}, d^2\overline{r})=0$，其中$\overline{N}$是曲面的法矢量。

844. 证明平面上的测地线是且仅是直线。

845. 证明柱面的测地线是且仅是直母线和一般螺旋线。

846. 证明旋转曲面的经线是测地线。

847. 证明：旋转曲面上的纬线是测地线是当且仅当在它的点上，经线的切线平行于旋转轴。

848. 求球面的测地线。

849. 证明测地线是渐近曲线乃当且仅当其为直线。

850. 证明测地线是曲率线乃当且仅当其为平面曲线。

851. 可展曲面上的测地线的从切面族的包络就是该可展曲面，试证之。

852. 可展曲面上的测地线，其达布矢沿该点的母线方向，试证之。

853. 在空间曲线的从切面族的包络面上，此曲线是测地线，试证之。

854. 证明：曲面上的曲线的测地曲率能按公式

$\kappa_g = (\overline{n}, \dot{\overline{r}}, \ddot{\overline{r}})$计算，其中$\overline{n}$是曲面的法线单位矢量。

855. 证明曲线的测地曲率等于曲线在该点曲面之切平面上投影的曲率。

856—858. 求测地曲率：

(856) 半径为R的球面上的半径为r的圆。

(857) 正螺面

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = av$$

上的螺旋线（u＝常数）。

(858) 在曲面

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = f(v)$$

上的曲线u＝常数和v＝常数。

859. 证明：渐近曲线在一点的测地曲率等于它的曲率。

860. 证明：曲面上曲线的测地挠率能用公式

$$\tau_g = (\dot{\overline{r}}, \overline{n}, \dot{\overline{n}})$$

计算，其中$\overline{n}$为曲面的法线单位矢量。

861. 曲面上的曲线为曲率线的充要条件是在它的每个点的测地挠率等于零，试证之。

862. 证明：渐近曲线在每点的测地挠率等于它的挠率。

863—864. 求测地线：

(863) 正螺面；

(864) 伪球面。

865. 证明李乌维尔曲面（见698题）的测地线由方程

$$\int \frac{du}{\sqrt{f(u)+a}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{\varphi(v)-a}} + b$$

给出，其中 a 和 b 是任意常数。

866. 证明：在旋转曲面上沿任何测地线都有关系式

$$\rho\cos\mu = c$$

成立，其中 ρ 为测地线的点到旋转轴的距离，μ 为测地线和纬线的夹角，c 对给定的测地线为常数（克列若定理），逆定理成立吗？即如果沿着旋转曲面上的某条曲线上述关系式成立，是否可断定这条曲线是测地线？

867—869. 利用克列若定理，研究下列曲面上测地线的性质：

（867）旋转椭圆面；

（868）旋转单叶双曲面；

（869）环面。

870. 若过曲面上一点 M_0 沿所有方向作测地线，并由点 M_0 在测地线上截取等长的弧，则这些弧线的端点构成测地线的正交轨线，试证之。

§18. 曲面论中的活动标架法

映射 ω 称为曲面 S 上的线性微分形式（或 1—形式），这个映射将每一点 $M\in S$ 对应为矢量空间 $T\ S$ 上的一个线性形式 ω_M；1—形式 ω 将曲面上的每一个矢量场 $\overline{\xi}$ 对应为曲面上由公式

$$\omega(\overline{\xi})(M) = \omega_M(\overline{\xi}_M)$$

定义的函数 $\omega(\overline{\xi})$。如果对任何光滑矢量场 $\overline{\xi}$，函数数 $\omega(\overline{\xi})$ 是光滑的，则 1—形式 ω 称为光滑的。

映射Ω称为曲面S上2—形式，这个映射将每一点$M\in S$对应到矢量空间$T_M S$上的一个2—形式Ω_M；2—形式Ω使曲面上每个矢量场对$\overline{\xi}$，$\overline{\eta}$对应到曲面上由公式

$$\Omega(\overline{\xi},\ \overline{\eta})(M)=\Omega_M(\overline{\xi}_M,\ \overline{\eta}_M)$$

定义的函数$\Omega(\overline{\xi},\ \overline{\eta})$。如果对于任何光滑矢量$\overline{\xi}$，$\overline{\eta}$，函数$\Omega(\overline{\xi},\ \overline{\eta})$是光滑的，则2—形式称为光滑的。今后将仅研究光滑的1—形式和2—形式。

由公式$(\omega\wedge\theta)_M=\omega_M\wedge\theta_M$定义的2—形式$\omega\wedge\theta$称为曲面S上的1—形式$\omega$和$\theta$的外积，其中外积$\omega_M\wedge\theta_M$看作在矢量空间$T_M S$上，设$(U,\ \overline{r})$是具有曲线坐标$(u,\ v)$的曲面S的参数表示，且$W=\overline{r}(U)$，那么曲线坐标的微分$du$、$dv$根据法则

$$du_M(\overline{h})=h_1,\quad dv_M(\overline{h})=h_2$$

能看为W上的1—形式，其中$\overline{h}$是曲面在点M的切矢量，而$(h_1,\ h_2)$是它在活动基$(\partial_u\overline{r},\partial_v\overline{r})$下的坐标。所有W上的1—形式$\omega$可唯一地表示为

$$\omega=a_1du+a_2dv,$$

其中$a_1=\omega(\partial_u\overline{r})$，$a_2=\omega(\partial_v\overline{r})$是W上的光滑函数。定义在W上的函数f的微分df是W上的1—形式。这个函数f根据法则

$$f(u,\ v)=f(\overline{r}(u,\ v))$$

同样能看为U上的函数，

那样df可表为：

$$df=\partial_u f\,du+\partial_v f\,dv。$$

由公式

$$d\omega = da_1 \wedge du + da_2 \wedge dv$$
$$= (\partial_u a_2 - \partial_v a_1) du \wedge dv$$

确定的2一形式$d\omega$称为定义在W上的1一形式 ω 的外微分。

使W中的每一点M对应到标架$(M, \overline{e}_1(M), \overline{e}_2(M), \overline{e}_3(M))$的映射称为在定向曲面$W = \overline{r}(U)$上的活动标架，其中矢量$\overline{e}_1(M), \overline{e}_2(M)$属于$T_M W$，而$(\overline{e}_1(M), \overline{e}_2(M), \overline{e}_3(M))$是与曲面W的定向一致的$R^3$内的标准正交基。M，$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$的值，根据下面的法则能够看作W上的并在$R^3$内取值的矢函数：矢函数$\overline{M}$使曲面的点N对应它的经矢，而矢函数$\overline{e}_j$使N对应矢量$\overline{e}_j(N)$($j=1, 2, 3$)。矢函数$\overline{M}$和$\overline{e}_3$是光滑的，将同样认为$\overline{e}_1$和$\overline{e}_2$也是光滑的。这些矢函数的微分记为：

$$\left.\begin{aligned}
dM_N(\overline{h}) &= \omega_N^1(\overline{h})\,\overline{e}_1(N) + \omega_N^2(\overline{h})\,\overline{e}_2(N) + \omega_N^3(\overline{h})\,\overline{e}_3(N), \\
d\overline{e}_{1N}(\overline{h}) &= \omega_1^1{}_N(\overline{h})\,\overline{e}_1(N) + \omega_1^2{}_N(\overline{h})\,\overline{e}_2(N) + \omega^3_1{}_N(\overline{h})\,\overline{e}_3(N), \\
d\overline{e}_{2N}(\overline{h}) &= \omega_2^1{}_N(\overline{h})\,e_1(\overline{N}) + \omega_2^2{}_N(\overline{h})\,\overline{e}_2(N) + \omega_2^3{}_N(\overline{h})\,\overline{e}_3(N), \\
d\overline{e}_{3N}(\overline{h}) &= \omega_3^1{}_N(\overline{h})\,e_1(\overline{N}) + \omega_3^2{}_N(\overline{h})\,e_2(\overline{N}) + \omega_3^3{}_N(\overline{h})\,\overline{e}_3(N),
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

其中$\overline{h} \in T\ W$。这时ω^i，ω_i^j ($i, j=1, 2, 3$)是曲面W上的1一形式。方程（1）可写为

$$d\overline{M}=\sum_{i=1}^{3}\omega^{i}\overline{e}_{i},\quad d\overline{e}_{i}=\sum_{j=1}^{3}\omega_{i}^{j}\overline{e}_{j}\qquad(2)$$

方程（2）称为活动标架的运动方程。如果在W的每一点N矢量$\overline{e}_1(N)$和$\overline{e}_2(N)$具有主方向，则活动标架（M，$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$）称为曲面W的加当标架。

设$\overline{\xi}$是曲面W的光滑矢量场，且

$$\overline{\xi}_N = a_1(N)\overline{e}_1(N)+a_2(N)\overline{e}_2(N);$$

那么a_1, a_2是W上的光滑函数，矢量场$\overline{\xi}$也能看作R^3内的矢量场，并写为

$$\overline{\xi}_{\cdot} = \xi_1(N)\overline{i}_1+\xi_2(N)\overline{i}_2+\xi_3(N)\overline{i}_3,$$

其中（$\overline{i}_1, \overline{i}_2, \overline{i}_3$）是$R^3$内的规范基。对于在曲面W上的光滑正则曲线$\gamma(t)$，可用$\overline{\xi}(t)$表示矢量$\overline{\xi}\gamma(t)$，那么

$$\overline{\xi}(t)=\xi_1(t)\overline{i}_1+\xi_2(t)\overline{i}_2+\xi_3(t)\overline{i}_3,$$

其中ξ_1、ξ_2、ξ_3是光滑函数。矢量

$$\overline{\xi}'(t)=\sum_{j=1}^{3}\xi'_j(t)\overline{i}_j$$

称为矢量场$\overline{\xi}$沿曲线γ的导数。

设$\overline{h}$是曲面W在点M的切矢量，$\overline{\gamma}(t)$是W上过$t=t_0$的点M的正则曲线，且使$\overline{\gamma}'(t_0)=\overline{h}$，矢量场$\overline{\xi}$沿曲线$\gamma$的导数矢量$\overline{\xi}'(t_0)$在曲面的点M处的切平面的正投影称为矢量场$\overline{\xi}$沿矢量$\overline{h}$方向的共变导数。矢量场$\overline{\xi}$沿$\overline{h}$方向的共变导数用$D_{\bar{h}}\overline{\xi}$表示，它是曲面在点M的切矢量。如果$\overline{\xi}=a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2$，则有公式

$$D\overline{\xi}=da_1(\overline{h})\overline{e}_1+da_2(\overline{h})\overline{e}_2-a_2\omega_1^2(\overline{h})\overline{e}_1+a_1\omega_1^2(\overline{h})\overline{e}_2。$$

矢量场$\overline{\xi}$称为沿曲线γ的平行矢量场，如果对于所有t有

$$D_{\gamma(t)}\overline{\xi}=0,$$

即场$\overline{\xi}$沿曲线γ的任一切矢量方向上的共变导数等于零。

871．从标准正交活动标架的条件可得到矩阵(ω_i^j)是反对称的，试证之。

872．因为活动标架的矢量$\overline{e_1}$、$\overline{e_2}$是曲面切平面中的基，故在公式（1）和（2）中形式$\omega^3=0$，试证之。

873．设$\gamma(t)$是曲面W上的曲率线，如果活动标架的矢量$\overline{e}_1$是曲线γ的切矢量，则$\omega_3^2\ \gamma(t)(\overline{e}_1)=0$。类似地，如果$\overline{e}_2$是$\gamma$的切矢量，则$\omega_3^1\gamma(t)(\overline{e}_2)=0$。试证之。

874．证明：在曲面的所有点，下列法则成立：

$$\omega^i(\overline{e_j})=\sigma_j^i=\begin{cases}1, & 如果\ i=j\\ 0, & 如果\ i\neq j\end{cases},\quad (i、j=1,2)。$$

875．如果在曲面W的每个点矢量$\overline{e}_1\uparrow\uparrow\partial_u\overline{r}$，$\overline{e}_2\uparrow\uparrow\partial_v\overline{r}$，则$\omega^1=\sqrt{E}du$，$\omega^2=\sqrt{G}dv$，其中E、G是曲面第一二次形式的系数，试证之。

876．假设曲面W的参数表示（U，$\overline{r}$）的坐标曲线是曲率线，且$\overline{e}_1\uparrow\uparrow\partial_u\overline{r}$，$\overline{e}_2\uparrow\uparrow\partial_v\overline{r}$。证明1－形式$\omega^i$，$\omega_i^j$可表示成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^1=\sqrt{E}du,\quad \omega^2=\sqrt{G}dv,\\
&\omega_1^2=-\omega_2^1=q_1\sqrt{E}du+q_2\sqrt{G}dv,\\
&\omega_1^3=-\omega_3^1=p_1\sqrt{E}du,\\
&\omega_2^3=-\omega_3^2=p_2\sqrt{G}dv。
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

877. 形式为

$$\partial_u b_i = \sum_{j=1}^{n} f_i^j \, b_j, \qquad \partial_v b_i \sum_{j=1}^{n} g_i^j \, b_j$$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的微分方程组，如果满足条件

$$\partial_v \left(\sum_{j=1}^{n} f_i^j b\right) = \partial_u \left(\sum_{j=1}^{n} g_i^j b_j\right),$$

则称这方程组为完全可积的。它的特点是在给出初始条件

$$b_i(u_0, v_0) = b_i^0$$

时存在唯一解。如果形式 ω^i、ω_i^j（3）给出，那么活动标架的运动方程等价于下面的方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_u \overline{M} = \sqrt{E}\,\overline{e}_1, \quad \partial_v \overline{M} = \sqrt{G}\,\overline{e}_2,\\
&\partial_u \overline{e}_1 = q_1\sqrt{E}\,\overline{e}_2 + p_1\sqrt{E}\,\overline{e}_3, \partial_v \overline{e}_1 = q_2\sqrt{G}\,\overline{e}_2\\
&\partial_u \overline{e}_2 = -q_1\sqrt{E}\,\overline{e}_1, \partial_v \overline{e}_2 = -q_2\sqrt{G}\,\overline{e}_1 + p_2\sqrt{G}\,\overline{e}_3\\
&\partial_u \overline{e}_3 = -p_1\sqrt{E}\,\overline{e}_1, \quad \partial_v \overline{e}_3 = -p_2\sqrt{G}\,\overline{e}_2。
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

证明：方程组（4）完全可积的条件具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_v \sqrt{E} + q_1\sqrt{EG} = 0, \partial_u \sqrt{G} = q_2\sqrt{EG},\\
&\partial_v (q_1\sqrt{E}) - \partial_u (q_2\sqrt{G}) = p_1 p_2\sqrt{EG},\\
&\partial_v (p_1\sqrt{E}) + p_2 q_1\sqrt{EG} = 0,\\
&\partial_u (p_2\sqrt{G}) = p_1 p_2\sqrt{EG}。
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

说明初始条件的几何意义。

878. 证明：如果1—形式 ω^i，ω_i^j 满足条件（3），则完全可积的条件（5）等价于条件：

$$d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega_1^2, \quad d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2,$$

$d\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2$，$d\omega_1^3=\omega_1^2\wedge\omega_2^3$，

$d\omega_2^3=\omega_1^2\wedge\omega_1^3$。

879. 如果1—形式ω^i，ω_i^j满足条件（3），则曲面的第一二次形式可表示为如下形式：

$ds^2=d\overline{M}^2=Edu^2+Gdv^2$。试证之。

880. 如果1—形式ω^i，ω_i^j满足条件（3），则曲面的第二二次形式可表示为如下形式

$\varphi_2=-d\overline{M}\cdot d\overline{e_3}=p_1Edu^2+p_2Gdv^2$。

试证之。

881. 证明：在方程（3）中的p_1和p_2是曲面的主曲率。

882. 证明：在一曲率线v线的各点由曲率线u线的切线形成的直纹曲面是可展曲面，且它的脊线与轴$M\overline{e_1}$相切于径矢为$\overline{M}-\frac{1}{q_2}\overline{e}_1$的点。类似地，在一条u线的各点v线的切线形成的直纹曲面是可展的，且它的脊线与轴$M\overline{e_2}$相切于径矢为$\overline{M}+\frac{1}{q_1}\overline{e_2}$的点。

883. 证明欧拉公式：

$\kappa_n=p_1\cos^2\varphi+p_2\sin^2\varphi$。

884. 证明：杜潘标线方程能表为

$p_1x^2+p_2y^2=\pm1$

885. 证明：曲面的全曲率仅仅依赖于第一二次形式的系数，并能用公式

$$K=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\partial_v\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_v\sqrt{E}\right)-\partial_u\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\partial_u\sqrt{G}\right)\right\}$$

表示。

886．证明：曲面上渐近曲线在每一点的挠率的平方等于曲面在该点的全曲率反号（贝尔特拉米——恩涅贝尔定理）。

887．证明：曲率线在点M处的测地曲率能按公式

$$\kappa_g|_{dv=0}=q_1,\quad \kappa_g|_{du=0}=-q_2$$

计算。

888．证明公式

$$d\omega_1^2=-K\omega^1\wedge\omega^2$$

成立，其中K是曲面的全曲率。

889．证明：在沿曲面平行移动矢量时，矢量的长度和它们之间的角度保持不变。

890．使曲面上的曲线为测地线的充要条件是它的单位切矢量沿此曲线是平行地移动的。试证之。

891．如果曲面上的单位矢量场

$$\overline{r}=\cos\varphi\,\overline{e}_1+\sin\varphi\,\overline{e}_2$$

在曲面上沿某条曲线平行移动，则在此曲线的各点有

$$-d\varphi=q_1\sqrt{E}\,du+q_2\sqrt{G}\,dv \qquad (6)$$

试证之。

892．曲面上的一矢量沿曲面上单连通域D的边界线L平行绕行一周时，矢量的转角等于这个区域的积分曲率。即

$$\triangle\varphi=\iint\limits_D K\,d\sigma。$$

试证之。

893．曲面上光滑边界线L围成的单连通城D的积分曲率和这个边界的积分测地曲率以关系式

$$\iint_D K\,d\sigma+\oint_L \kappa_g\,ds=2\pi$$

联系，试证之。

894．设D是曲面上由曲线多边形L围成的单连通域，那么

$$\iint_D K\,d\sigma+\oint_L \kappa_g\,ds+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi$$

其中α_1、α_2,…,α_n是多边形L的外角（高斯——崩尼定理），试证之。

895．如果曲面上的区域D由测地三角形ABC（$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$是测地线）围成，它的内角相应为α、β、γ，则

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\iint_D K\,d\sigma。$$

试证之。

896．在一单连通曲面的所有点上全曲率非正，证明在这单连通曲面上不存在闭测地线。

§19．杂　　题

897．曲面

$2x^2+3y^2+4z^2-2xy-4x+18y-16z=0$

的所有点在坐标平面上作垂直投影，求各投影的象集。

898．如果曲面沿某条曲线与一平面相切，则这条曲线

的每一个点是曲面的抛物点，试证之。

899. 证明：如果曲面沿曲线L的法线均平行，则曲线L的所有点都是曲面的抛物点。

900. 如果在曲面S的球面映射下一族渐近曲线的每一条都对应为大圆，则S是斜直纹曲面，试证之。

901. 证明平面和悬链面是仅有的旋转极小曲面。

902. 证明：在直纹面中正螺面是唯一的（非平面的）极小曲面。

903. 求由形如 $z=f(y/x)$ 的方程给出的所有极小曲面。

904. 设 $\overline{r}=\overline{r}(u、v)$ 是曲面S的方程，而 $\overline{r^*}=\overline{r}+a\overline{n}$ 是S的平行曲面 S^* 的方程，试用曲面S的全曲率和中曲率表示曲面 S^* 的全曲率和中曲率。

905. 已知曲面的中曲率为非零常数H，在曲面的所有法线上向一侧截取线段 $\frac{1}{2H}$，证明：这样建立的平行曲面的全曲率为常数。

906. 证明：对于曲面S的中曲率有公式

$$H=\lim_{a\to 0}\frac{d\sigma-d\sigma^*}{2a\,d\sigma}$$

其中 $d\sigma$ 和 $d\sigma^*$ 分别为平行曲面S和 S^* 的面积元素。

907. 证明：任意一极小曲面片的面积不会小于相应的平行曲面片的面积。

908. 证明：曲面S的球面映射的面积与相应的曲面片S的面积的比的极限按其数值和符号等于曲面的全曲率。

909. 证明：如果曲面的主曲率半径之一是常数，则这

曲面是半径为常数，中心在某曲线上的球面族的包络。

910. 已知直线系：

$$x = tz + p, \quad y = pz + \frac{t^3}{3},$$

其中 t 和 p 是参变量，在 p 和 t 之间有怎样的关系时这些直线形成可展曲面？求由这些曲面的脊线形成的图形，并求这些曲面与平面 xOy 的交线。

911. 圆柱面与不平行它的轴的平面相交，在圆柱面与平面贴合时交线变成怎样的曲线？

912. 已知一球面和一直线 d，求过直线 d 的平面族在球面上的截线的正交轨线。

913. 如果质点在没有外力作用下沿某个曲面强迫移动，则质点将沿测地线移动，试证之。

914. 由一已知点向曲面的所有切平面上引垂线，由垂足构成的图形称为曲面关于已知点的垂足曲面，求曲面 $F(x, y,) z = 0$ 关于坐标原点的垂足曲面。

915—917. 求下列曲面关于坐标原点的垂足曲面。

(915) $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y^2}{b^2} + \varepsilon'\frac{z^2}{c^2} = 1$, ε、$\varepsilon' = \pm 1$。

(916) $\frac{y^2}{a} + \frac{x^2}{b} = 2z$。

(917) $xy = az$。

918. 证明：只有可展曲面能贴合到平面上。

919. 试说出什么样的曲面，其第一二次形式为

$ds^2 = E(u)du^2 + G(v)dv^2$？

920. 怎样的曲面其第一二次形式的系数能变换成常数？

921. 证明：在曲面贴合时测地线仍变为测地线。

922. 如果曲面上有两族这样的测地线，一族测地线交另一族测地线成固定角，则这曲面是可展的；反之，任意可展曲面必存在两族具有上述性质的测地线。试证之。

923. 证明：锥曲上测地线的密切面到锥面顶点等距，反之，锥面上有上述性质的曲线是测地线。

924. 证明：两个具有相同常数全曲率的曲面彼此可以贴合。

925. 证明：所有全曲率为正常数的曲面可贴合到球面上。

426. 证明：所有全曲率为负常数的曲面可贴合到伪球面上。

927. 证明：在正螺面贴合到悬链面时，一个曲面上的曲率线和渐近曲线分别变成另一曲面的渐近曲线和曲率线。

第五章　曲线和曲面的仿射性质

我们研究的是在欧几里德空间R^3中的曲线和曲面，欧氏空间与仿射空间的区别是在其上存在度量。前面研究的曲线和曲面的所有性质都是关于在R^3中运动不变的，而称为度量性质。然而这些性质中的许多性质关于空间R^3更一般的变换，即仿射变换也是不变的。这些性质称为仿射性质。将点$M(x, y, z)$变换成点$M'(x', y', z')$的任意一个仿射变换可由：

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3, \end{cases}$$

给出，其中矩阵(a_{ij})是满秩的。如果矩阵(a_{ij})又是正交的，则这个变换是运动。

928. 设$\mathscr{A}$是空间R^3的仿射变换，$\overline{r} = \overline{r}(t)$是$R^3$中的曲线，那么其合成$\mathscr{A} \circ \overline{r}(t)$是$R^3$中的曲线，试证之。

929. 证明：仿射变换将线变到线，即线的概念是仿射性质。

930. 证明：仿射变换将曲面变到曲面，即曲面的概念是仿射性质。

931. 如果$(U, \overline{r})$是曲面S的参数表示，而$\mathscr{A}$是仿射变换，则$(U, \mathscr{A} \circ \overline{r})$是曲面$\mathscr{A}(S)$的参数表示，试证之。

932。证明：曲线的切线的概念是仿射性质。

933。证明：曲面的切平面的概念是仿射性质，即曲面的切平面在仿射变换下变为变换曲面的切平面。

934。如果在平面上的单参数曲线族或空间中的单参数曲面族具有包络，则经仿射变换得到的族同样也具有包络，此包络是原族包络的象，试证之。

935。证明：直纹曲面的概念是仿射性质。

936。证明：可展曲面在仿射变换下变为可展曲面，且原曲面的脊线变为变换后曲面的脊线。

937。证明：斜直纹曲面在仿射变换下变为斜直纹曲面。

938。证明：曲线的密切平面的概念是仿射性质。

939—957。说明下面指出的概念哪些是仿射性质，哪些是度量性质：

(939) 平面曲线。

(940) 曲线的曲率。

(941) 平面曲线的渐缩线。

(942) 曲线的挠率。

(943) 曲线的主法线。

(944) 曲线的付法线。

(945) 曲线的法平面。

(946) 曲线的从切面。

(947) 曲面在已知点的共轭方向和渐近方向。

(948) 曲面上的渐近曲线。

(949) 曲面上的曲率线。

(950) 曲面上的测地线。

(951) 曲面的全曲率。

(952) 曲面的中曲率。

(953) 全曲率为零的曲面。

(954) 中曲率为零的曲面（极小曲面）。

(955) 曲面的椭圆点、双曲点和抛物点。

(956) 曲面的圆点。

(957) 曲面的平点。

958. 求连结椭圆共轭直径对的端点的直线族的包络。

959. 求过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的点对的直线族的包络的方程，这种点对同椭圆中心一起确定的椭圆扇形有固定面积S。

960. 求截交角为2α的两直线有固定面积S的三角形的直线族的包络方程。

961. 求截已知抛物线 $y=ax^2$ 有固定面积S的弓形直线族的包络。

962. 证明：沿斜直纹曲面的一母线作曲面的渐近曲线的切线，由这些切线形成的图形是单叶双曲面或双曲抛物面。

第六章　场论初步

§20. 数　量　场

数量场定义为数量函数

$$u=u(P)=u(x,\ y,\ z)=u\ (\overline{r}),$$

其中$P(x,y,z)$是空间的点，而$\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$是该点的径矢。

如果存在这样的坐标系，使函数u不依赖于z，即

$$u=u(x,\ y),$$

则场$u=u(P)$称为平面场。这种场在平行Oz轴的每一条直线上具有相同的值。因此，通常仅仅在xOy平面中研究它。

曲面　$u(x,y,z)=C$，　其中$C=$常数，

称为数量场的分层曲面。

在平面场时分层曲面

$$u(x,\ y)=C \tag{1}$$

是母线平行Oz轴的柱面。

如果平面场仅仅看作在xOy平面上，则方程(1)确定它的分层曲线的全体。如果定义数量场的函数

$$u\ (\overline{r})=u(x,y,z)$$

是连续可微的，则称矢量场

$$\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$$

为这个场的梯度。

场 u 在已知点 P（x，y，z）的梯度指向分层曲面

$$u\ (x,y,z)\ =C$$

过点 P 的法线方向，这个矢量对于场的每个点按其摸

$$|\mathrm{grad}\,u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

和方向给出函数 u 变化的最大速度。数量场的梯度也用符号 ∇u 表示，其中符号 ∇ 读为《那勃勒》。这样

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}。$$

∇ 能看作微分算子（哈密顿算子）：

$$\nabla=\overline{i}\frac{\partial}{\partial x}+\overline{j}\frac{\partial}{\partial y}+\overline{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

将它作用于数量场 u 上，就给出grad u，为方便起见，这个算子可看作符号矢量，并适用一般的矢量代数法则。例如，

$$\overline{r}\cdot\nabla=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}。$$

数量场 u（P）沿着矢量

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$$

给出的 l 方向的导数根据公式：

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

计算，其中： $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\overline{a}|}$， $\cos\beta=\frac{a_y}{|\overline{a}|}$，

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\overline{a}|},\quad |\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}。$$

数量场的方向导数和梯度由公式

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\overline{a}_0\cdot \text{grad}\, u$$

联系。其中$\overline{a}_0$是已知方向的单位矢量。

若数量场在某点沿任何方向的导数等于零，则此点称为这个场的稳定点。

963—967。求平面场（仅看作在 xOy 平面上）的分层曲线：

(963) $u=x^2+y^2$。　(964) $u=x^2-y^2$。

(965) $u=y/x^2$。　(966) $u=2x/(x^2+y^2)$。

(967) $u=(2x-y+1)/x^2$。

968—971。求下列数量场的分层曲面。

(968) $u=x+y+z$。　(969) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(970) $u=x^2+y^2-z^2$。

(971) $u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$

972。求数量场

$$u=x^3-2x^2y+xy^2+1$$

在点M(1，2)沿连结此点与点N(4，6)的矢量方向的导数。

973。求数量场

$$u=xy^2+z^3-xyz$$

在点M(1，1，2)沿与坐标轴的夹角为 $\alpha=60°$，$\beta=45°$，$\gamma=60°$的方向的导数。

974—975。求下列数量场的稳定点：

(974) $u=x^3+y^3-3xy$。

(975) $u=2y^2+z^2-xy-yz+2x$。

976—979. 求下列数量场的梯度：

(976) $u=x^2+2y^2+3z^2-xz+yz-xy$。

(977) $u=x^3+y^3+z^3-3axyz$。

(978) $u=xyze^{x+y+z}$。

(979) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-xz}$。

980. 求数量场 $u=x^3+y^3-3xy$ 在点M(2，1)处的梯度。

981. 求数量场 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点M(2，-2，1)处梯度的模和方向。

982. 求数量场 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点O(0，0，0)，A(2，0，1)处梯度的模和方向，在哪些点处梯度等于零？

983—984. 求下列数量场在两已知点的梯度间的夹角。

(983) $u=\ln(y/x)$，A(1/2，1/4)，B(1，1)

(984) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$，A(1，2，2)，B(-3，1，0)

985. 求数量场 $u=x^2+y^2-z^2$ 和 $v=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$ 在点M(1，1，$\sqrt{7}$)处的梯度间的夹角。

986. 确定数量场 $u=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ 在点M(1，1，1)处沿矢量 $\overline{a}=8\overline{i}-4\overline{j}+8\overline{k}$ 方向变化的性质，求该场变化速度的值。

987. 求点，使在该点函数 $u=\ln\left(y+\dfrac{1}{x}\right)$ 的梯度等于 $-\dfrac{25}{16}\overline{i}+\overline{j}$。

988. 求场 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 在点M(x，y，z)处

沿它的径矢$\overline{r}$的方向的导数，在什么情况下这个导数将等于梯度的模？

989. 求数量场$u=u(x,y,z)$沿场$v=v(x,y,z)$的梯度方向的导数，在什么情况下这导数将等于零？

990—996. 证明下列公式的正确性：

(990) $\operatorname{grad} c=\overline{0}$，$c=$常数。

(991) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v$。

(992) $\operatorname{grad}(uv)=v\operatorname{grad} u+u\operatorname{grad} v$。

(993) $\operatorname{grad}(cu)=c\operatorname{grad} u$，$c=$常数。

(994) $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\operatorname{grad} u-u\operatorname{grad} v}{v^2}$

(995) $\operatorname{grad} f(u)=f'(u)\operatorname{grad} u$。

(996) $\operatorname{grad} u^n=nu^{n-1}\operatorname{grad} u$。

997—1004. 在下列情况下，求由$r=|\overline{r}|$决定的数量场的梯度：

(997) $\operatorname{grad} r$。　　(998) $\operatorname{grad} f(r)$。

(999) $\operatorname{grad} r^n$，n是自然数。

(1000) $\operatorname{grad}(1/r)$　　(1001) $\operatorname{gracd}(\ln r)$。

(1002) $\operatorname{grad}(\overline{c}\cdot\overline{r})$，$\overline{c}$为常矢。

(1003) $\operatorname{grad}((\overline{a}\cdot\overline{r})/(\overline{b}\cdot\overline{r}))$，$\overline{a}$，$\overline{b}$为常矢。

(1004) $\operatorname{grad}(\overline{c}\times\overline{r})^2$，$\overline{c}$为常矢。

1005－1007. 证明下列公式的正确性：

(1005) $\operatorname{grad} f(u,v,w)=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v+\frac{\partial f}{\partial w}\operatorname{grad} w$。

(1006) $(\overline{r}\cdot\nabla)r^n=nr^n$。

(1007) $(\overline{u}\cdot\nabla)r = v$。

1008．求数量场$f(u,v,w)$梯度的计算公式，这个数量场由三个正交的曲线坐标的函数给出。

1009．求数量场在柱面坐标下的梯度计算公式。

1010—1014．求下列在柱面坐标下的数量场的梯度：

(1010) $u = z + r\varphi$。　(1011) $u = zr\varphi$。

(1012) $u = z\sin\varphi + r$。　(1013) $u = z\cos\varphi + r^2$。

(1014) $u = z\sin^2\varphi + r^3$。

1015．求数量场在球面坐标下的梯度计算公式。

1016—1020．求下列在球面坐标下的数量场的梯度：

(1016) $u = \rho\varphi$。　(1017) $u = \rho\theta$。

(1018) $u = \rho\theta\varphi$。　(1019) $u = \varphi\sin\theta + \rho$。

(1020) $u = \theta\cos\varphi + \rho$。

§21．矢　量　场

矢量场定义为点的矢量函数

$\overline{a} = \overline{a}(P) = \overline{a}(\overline{r}) = a_x(x,y,z)\overline{i} + a_y(x,y,z)\overline{j} + a_z(x,y,z)\overline{k}$,

其中$P(x,y,z)$是空间的点，$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$是它的径矢。若曲线在每点的切线具有矢量$\overline{a}(P)$方向，这种曲线称为矢量场的矢量曲线。矢量场的矢量曲线（力线、流线）可由微分方程组：

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$$

求得。

数量函数： $\operatorname{div}\overline{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\nabla\overline{a}$

称为矢量场

$$\overline{a}(P)=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$$

的散度（发散性）。

矢量场 $\operatorname{rot}\overline{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{j}$

$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k}$$

称为矢量场 $\overline{a}(P)$ 的旋度（涡流），或记为符号

$$\nabla\times\overline{a}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}。$$

积分

$$\Pi=\iint_S\overline{a}\cdot\overline{n}\,d\sigma=\iint_S a_n\,d\sigma$$

$$=\iint_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)d\sigma$$

（其中 a_n 是矢量 $\overline{a}$ 在矢量 $\overline{n}$ 方向上的投影）称为矢量场 $\overline{a}(P)$ 在曲面 S 的法线单位矢量 $\overline{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 所确定的一侧通过曲面 S 的流量。

如果 S 是围区域 V 的闭曲面，而 $\overline{n}$ 是它的外法线单位矢量，则有奥斯特洛格拉得斯基公式：

$$\iiint_V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dw$$

$$=\iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,d\sigma,$$

或为矢量形式：

$$\iiint_V \operatorname{div}\bar{a}\,dw = \iint_S a_n\,d\sigma。$$

矢量$\bar{a}$沿曲线L的曲线积分由下式确定：

$$\int_L \bar{a}\cdot d\bar{r} = \int_L a_s dS = \int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz ,$$

其中a_s是矢量$\bar{a}$在曲线L的切线上的投影。曲线积分表示了矢量场沿曲线L的功。如果曲线L是闭合的，则曲线积分称为矢量场$\bar{a}$沿闭路L的环量。

如果闭曲线L是定向曲面S的边界，则有斯托克斯公式

$$\oint_L \bar{a}\cdot d\bar{r} = \iint_S \bar{n}\cdot\operatorname{rot}\bar{a}\,d\sigma,$$

其中$\bar{n}$是确定S方向的曲面法线的单位矢量场，而L的定向与S的定向一致。

如果

$$\bar{a} = \operatorname{grad} u,$$

其中$u = u(\bar{r})$是数量函数（矢量场$\bar{a}$的势），则矢量场$\bar{a}(\bar{r})$称为势量场。

定义在单连通区域的矢量场$\bar{a}$为势量场的充要条件是：

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \bar{0}。$$

在这种情况下，势u由方程

$$du = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

确定。如果势 u 是唯一确定，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \overline{a} \cdot d\,\overline{r} = u(B) - u(A),$$

特别是，矢量场 $\overline{a}$ 沿任何闭曲线的环量都等于零。

如果在一个矢量场 $\overline{a}$ （$\overline{r}$）的每一点有

$$\text{div}\,\overline{a} = 0$$

则称矢量场 $\overline{a}$ （$\overline{r}$）是管量场。在这种情况下，通过任何闭曲面的矢量流量等于零。

如果矢量场同时是势量场和管量场，则

$$\text{div}(\text{grad}\,u) = 0,$$

且势函数 u 是调和函数，即满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

或 $\triangle u = 0,$

其中

$$\triangle = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

是拉普拉斯算子。

1021—1025. 求下列矢量场的矢量曲线：

(1021) $\overline{a} = -cy\overline{i} + cx\overline{j}$，c 为常数。

(1022) $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + 2z\overline{k}$。

(1023) $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$。

(1024) $\overline{a} = y\overline{i} + x\overline{j}$。

(1025) $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$。

1026—1027. 求下列矢量场的散度：

(1026) $\overline{r} = xyz\overline{i} + (2x + 3y + z)\overline{j} + (x^2 + z^2)\overline{k}$

(1027) $\overline{r}=(6x^2y^2-z^3+yz-5)\overline{i}$
$+(4x^3y+xz+2)\overline{j}+(xy-3xz^2-3)\overline{k}$。

1028—1032. 证明下列公式的正确性：

(1028) $\mathrm{div}\,\overline{c}=0$，$\overline{c}$是常矢。

(1029) $\mathrm{div}(\overline{a}+\overline{b})=\mathrm{div}\,\overline{a}+\mathrm{div}\,\overline{b}$。

(1030) $\mathrm{div}(c\overline{a})=c\,\mathrm{div}\,\overline{a}$，$c$是常数。

(1031) $\mathrm{div}(u\overline{a})=u\,\mathrm{div}\,\overline{a}+\overline{a}\,\mathrm{grad}u$。

(1032) $\mathrm{div}(u\overline{c})=\overline{c}\,\mathrm{grad}u$，$\overline{c}$是常矢。

1033—1040. 在下列情况下求矢量场的散度：

(1033) $\mathrm{div}\,\overline{r}$。　(1033) $\mathrm{drv}(f(r)\overline{r})$。

(1035) $\mathrm{div}(\overline{r}/r)$。　(1036) $\mathrm{div}(r^n\overline{r})$。

(1037) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,f(r))$。　(1038) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)$。

(1039) $\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}u)$。　(1040) $\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}v)$。

1041—1046. 设$\overline{c}$和$\overline{c}_1$是常矢，在下列情况下求矢量场的散度：

(1041) $\mathrm{div}(r\overline{c})$。　(1042) $\mathrm{div}(\overline{r}^2\overline{c})$。

(1043) $\mathrm{div}(f(r)\overline{c})$。　(1044) $\mathrm{div}(\overline{r}\times\overline{c})$

(1045) $\mathrm{div}(\overline{r}\cdot\overline{c}_1)\overline{c}$。

(1046) $\mathrm{div}(\overline{r}\cdot\overline{c})\overline{r}$。

1047—1048. 设$\overline{e}$是单位常矢，计算

(1047) $\mathrm{div}(\overline{e}\cdot\overline{r})\overline{e}$。

(1048) $\mathrm{div}(\overline{e}\times(\overline{r}\times\overline{e}))$。

1049. 求

$$\mathrm{div}\frac{x+y+z}{xyz}\overline{r}。$$

1050—1051. 求满足下列方程的函数$f(r)$：

(1050) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = 0$

(1051) $2r \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = \operatorname{div}(\overline{r}/r)$。

1052. 求矢量$\overline{a}$在正交曲线坐标u、v、w下的散度公式，如果它的笛卡尔直角坐标x、y、z表示为公式：

$x = f(u,v,w)$，$y = g(u,v,w)$，$z = h(u,v,w)$。

1053. 求在柱面坐标下 $\operatorname{div}\overline{a}$的表示式。

1054. 求在球面坐标下 $\operatorname{div}\overline{a}$的表示式。

1055—1056. 求下列矢量场的旋度：

(1055) $\overline{a} = y^2z\,\overline{i} + z^2x\,\overline{j} + x^2y\,\overline{k}$。

(1056) $\overline{a} = xyz\,\overline{i} + (2x+3y-z)\overline{j} + (x^2+z^2)\overline{k}$

1057—1059. 证明下列公式的正确性：

(1057) $\operatorname{rot}(\overline{a}+\overline{b}) = \operatorname{rot}\overline{a} + \operatorname{rot}\overline{b}$。

(1058) $\operatorname{rot}(u\overline{a}) = u\operatorname{rot}\overline{a} + \operatorname{grad} u \times \overline{a}$。

(1059) $\operatorname{div}(\overline{a}\times\overline{b}) = \overline{b}\cdot\operatorname{rot}\overline{a} - \overline{a}\cdot\operatorname{rot}\overline{b}$。

1060—1067. 设$\overline{c}$和$\overline{c}_1$是常矢，在下列情况下求矢量场的旋度：

(1060) $\operatorname{rot}\overline{c}$。 (1061) $\operatorname{rot}\overline{r}$。

(1062) $\operatorname{rot}(\overline{r}\times\overline{c})$。 (1063)$(\operatorname{rot}(\overline{r}\cdot\overline{c})\overline{r})$

(1064) $\operatorname{rot}((\overline{r}\cdot\overline{c}_1)\overline{c})$。

(1065) $\operatorname{rot}((\overline{c}\times\overline{r})\times c_1)$。

(1066) $\operatorname{rot}(f(r)\overline{r})$。 (1067) $\operatorname{rot}(f(r)\overline{c})$。

1068—1071. 证明下列公式的正确性：

(1068) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u) = \overline{0}$。

(1069) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overline{a}) = 0$。

(1070) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u) = \triangle u$。

(1071) $\text{rotrot}\,\overline{a} = \text{graddiv}\,\overline{a} - \triangle\overline{a}$,
其中

$$\triangle\overline{a} = \triangle a_x\overline{i} + \triangle a_y\overline{j} + \triangle a_z\overline{k}。$$

1072. 利用奥斯特洛格拉得斯基公式证明：矢量场 $\overline{a} = \overline{r}$ 通过围成体积为V的任意区域的封闭曲面的流量等于3V。

1073. 计算矢量场 $\overline{a} = xy^2\overline{i} + x^2y\overline{j} + z\overline{k}$ 通过由坐标平面 $x = 0$，$y = 0$，$z = 0$ 和抛物面 $4 - z = x^2 + y^2$ 在第一卦限的部分所形成的封闭曲面的流量。

1074. 计算矢量场 $\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$ 通过球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的流量。

1075. 计算点电荷q的电场强度场

$$E = \frac{q\overline{r}}{r^3}$$

通过以半径为a中心在电荷点的球面的流量。

1076. 计算点电荷q的电场强度场

$$E = \frac{q\overline{r}}{r^3}$$

通过不含电荷q本身于内的封闭曲面S的流量。

1077. 计算矢量场 $\overline{a} = xy\overline{i} + (y + z)\overline{j} + (x + 2z)\overline{k}$ 通过平面 $2x + y + z = 2$ 在第一卦限部分的流量。

1078. 计算矢量场 $\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$ 的流量：

1) 通过圆锥面

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} = \frac{z^2}{H^2} \quad (0 \leqslant z \leqslant H) \text{ 的侧面；}$$

2) 通过上述锥面的整个曲面。

1079. 如果S是所围体积为V的封闭曲面，而$\overline{a}$和$\overline{b}$是常矢，则

$$\iint_S (\overline{a}\cdot\overline{r})b_L d\sigma = (\overline{a}\cdot\overline{b})V,$$

试证之

1080. 计算矢量$\overline{a}=x^3\overline{i}-y^3\overline{j}$沿圆$\overline{r}=R\cos t\,\overline{i}+R\sin t\,\overline{j}$的第一象限部分的曲线积分。

1081. 计算矢量$\overline{r}$沿螺旋线$x=a\cos\varphi$，$y=a\sin\varphi$ $z=b\varphi$，从$\varphi=0$到$\varphi=2\pi$一圈的曲线积分。

1082. 计算矢量场$\overline{a}=y\overline{i}-x\overline{j}$沿由坐标轴和星形线$\overline{r}=R\cos^3 t\,\overline{i}+R\sin^3 t\,\overline{j}$在第一象限部分所形成的闭合曲线L的环量。

1083. 计算矢量场$\overline{a}=y^2\overline{i}$沿由椭圆$\overline{r}=b\cos t\,\overline{i}+c\sin t\,\overline{j}$的右半部分和Oy轴的线段形成的闭合曲线的环量。

1084. 计算矢量场$\overline{a}=y\overline{i}$沿圆$\overline{r}=b\cos t\,\overline{i}+(b+b\sin t)\overline{j}$的边界的环量。

1085. 计算矢量场$\overline{a}=-y\overline{i}+x\overline{j}+c\overline{k}$的环量，其中c是常数：

1）沿圆周$x^2+y^2=1$，$z=0$

2）沿圆周$(x-2)^2+y^2=1$，$z=0$。

1086. 借助斯托克斯公式计算矢量场$\overline{a}=x^2y^3\overline{i}+\overline{j}+z\overline{k}$沿圆周$x^2+y^2=R^2$，$z=0$的环量，将半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$看作为已知圆所围的曲面。

1087—1089. 给出的矢量场是否有势u，如果它存在将u求出。

(1087) $\overline{a}=(5x^2y-4xy)\overline{i}+(3x^2-2y)\overline{j}$。

(1088) $\overline{a}=(y+z)\overline{i}+(x+z)\overline{j}+(x+y)\overline{k}$。

(1089) $\overline{a}=yz(2x+y+z)\overline{i}+xz(x+2y+z)\overline{j}+xy(x+y+2z)\overline{k}$。

1090. 矢量场$\overline{a}=r(\overline{c}\times\overline{r})$是管量场吗？其中$\overline{c}$是常矢。

1091. 证明：仅当$f(r)=k/r^3$时，矢量场$\overline{a}=f(r)\overline{r}$是管量场，其中k是常数。

解　　答

8．是的。反过来不正确。事实上，在开的半平面上由公式：

$$\overline{r}(x, y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), 如果 x \geqslant 0, \\ \left(-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), 如果 x < 0,\end{cases}$$

$y > 0$，

$y > 0$，

给定的矢函数在半轴O y的点上是不连续的。虽然$|\overline{r}(x, y)| = 1$，即函数$|\overline{r}(x, y)|$是连续的。

21．$2\overline{r}\cdot\overline{r}'$。　22．$2\overline{r}'\cdot\overline{r}''$。　23．$\overline{r}'\times\overline{r}'''$

24．$(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}^{(4)})$。

25．$(\overline{r}'\times\overline{r}''')\times\overline{r}''' + (\overline{r}'\times\overline{r}'')\times(\overline{r})^{(4)}$

26．$(\overline{r}\cdot\overline{r}') : \sqrt{\overline{r}^2}$

27．引入符号$\overline{r}_1 = \overline{F_1M}$，$\overline{r}_2 = \overline{F_2M}$（图4），这样$\overline{r}_1 = \overline{F_1F_2} + \overline{r}_2$，微分这个等式，得：

$$d\overline{r}_1 = d\overline{r}_2 \qquad (*)$$

据椭圆定义：$r_1 + r_2 = 2a$。微分，得：$dr_1 + dr_2 = 0$ 这样

$$\overline{r}_1^0\cdot d\overline{r}_1 + \overline{r}_2^0\cdot d\overline{r}_2 = 0 \qquad (**)$$

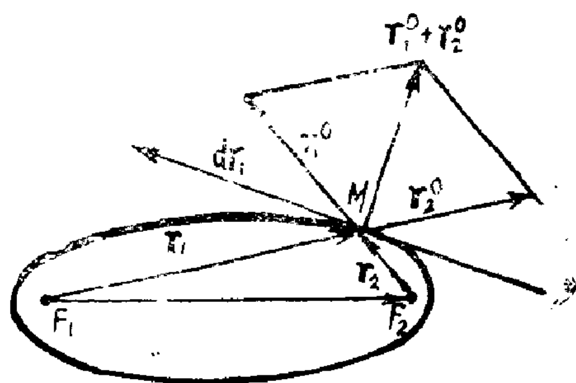


图 4

其中 $\overline{r}_1^0=\dfrac{\overline{r}_1}{r_1}$　　　　$\overline{r}_2^0=\dfrac{\overline{r}_2}{r_2}$

由等式(＊)和(＊＊)得

$$(\overline{r}_1^0+\overline{r}_2^0)\,d\overline{r}_1=0 \qquad (***)$$

矢量 $\overline{r}_1^0+\overline{r}_2^0$ 是沿着直线 $\overline{F_1M}$ 和 $\overline{F_2M}$ 间的角平分线方向。但由于（＊＊＊），矢量 $d\overline{r}_1$ 垂直于矢量 $\overline{r}_1^0+\overline{r}_2^0$，因此矢量 $d\overline{r}_1$ 沿上面那个角的另一平分线方向。

28. 1。

29. 不能得出。如果在某个值 $t=t_0$ 时 $\overline{r}(t_0)=\overline{0}$，则导数 $\left(\dfrac{d}{dt}|\overline{r}'(t)|\right)_{t=t_0}$ 不存在。

30. 1）不能，由矢函数的例 $\overline{r}(t)=(\cos t,\sin t)$ 可表明。

2）不能，1）中的例即可说明。

33. 必要性显然。下面证明充分性，设

$$\overline{r}'(t)=\varphi(t)\overline{r}(t) \qquad (*)$$

假定$\overline{r}(t)=\psi(t)\overline{e}(t)$ (＊＊)

其中$|\overline{e}(t)|=1$。微分等式（＊＊），并利用（＊），得

$$\psi'\overline{e}+\psi\overline{e}'=\varphi\psi\overline{e}。$$

将等式用$\overline{e}'$作数积，求得$\psi\overline{e}'^2=0$。因为$\psi\neq0$，则$(\overline{e}')^2=0$，因此$\overline{e}$为常矢。

34．用$\overline{a}$表示垂直三个共面矢量$\overline{r}'$，$\overline{r}''$，$\overline{r}'''$的单位矢量，则$\overline{a}\cdot\overline{r}'=0$，$\overline{a}\cdot\overline{r}''=0$，$\overline{a}\cdot\overline{r}'''=0$，由此有$\overline{a}'\cdot\overline{r}'+\overline{a}\cdot\overline{r}''=0$，或$\overline{a}'\cdot\overline{r}'=0$；以及$\overline{a}'\cdot\overline{r}''+\overline{a}\cdot\overline{r}'''=0$或$\overline{a}'\cdot\overline{r}''=0$，这就是说：$\overline{a}'\perp\overline{r}'$和$\overline{a}'\perp\overline{r}''$，即$\overline{a}\parallel\overline{a}'$，因此$\overline{a}$是常矢。现在由关系式$\overline{a}\cdot\overline{r}'=0$可求得$(\overline{a}\cdot\overline{r})'=0$即$\overline{a}\cdot\overline{r}=$常数。因此曲线位于垂直于矢量$\overline{a}$的平面上。

注：矢函数$\overline{a}$有导数，因为$\overline{a}=(\overline{r}'\times\overline{r}'')/|\overline{r}'\times\overline{r}''|$而根据矢函数的条件$\overline{r}$是有包括三阶在内的导数。

35．根据33题$\overline{r}'(t)=\varphi(t)\overline{a}$，$\overline{a}$是常矢，由此

$$\overline{r}(t)=\int\varphi(t)dt\,\overline{a}+\overline{b}。\qquad(*)$$

如果t在区间$[t_1, t_2]$上变化，则方程(＊)给直线段。

36．取径矢为$\overline{r}_0$的点为坐标原点，而取矢量$\overline{r}_1$和$\overline{r}_2$为Ox轴和Oy轴的基矢，（一般说来这坐标系不是直角坐标系）。这样，曲线的参数方程为$x=t$，$y=t^2$。因此$y=x^2$，这是抛物线方程，如果矢量$\overline{r}_1$和$\overline{r}_2$共线，则得到半直线或直线。

37．直线段。

38．如果$\overline{r}_1\neq\overline{0}$，射线；如果$\overline{r}_1=\overline{0}$，直线。

39. 如果质量为m 的质点在中心力F作用下的轨迹是 $\overline{r}=\overline{r}(t)$，则 $F=m\overline{r}''=a\overline{r}$，其中 $a=a(t)$是某个数量函数。余下证明，如果$\overline{r}(t)$是满足条件

$$m\overline{r}''=a\overline{r} \qquad (*)$$

的某个动点的轨迹，则运动轨迹是平面曲线。

对 t 微分等式（*）：

$$m\overline{r}'''=a'\overline{r}+a\overline{r}'=m\frac{a'}{a}\overline{r}''+a\overline{r}'$$

即在每个时刻矢量$\overline{r}'$, $\overline{r}''$, $\overline{r}'''$共面。如果矢量$\overline{r}'$和$\overline{r}''$不共线，则由34题知轨迹将为平面曲线，如果$\overline{r}'$和$\overline{r}''$共线，则由35题知轨迹为直线。

40. 证明可从函数 $y=x^3$的反函数不光滑得到。

45. 设（I，$\overline{r}=\overline{r}(t)$）是曲线γ的参数表示，其中 $I=]\alpha,\beta[$，则参数表示（J，$\overline{\rho}=\overline{\rho}(\tau)$）等价于（$I$，$\overline{r}$），其中 $J=]-\beta,-\alpha[$，$\overline{\rho}(\tau)=\overline{r}(-\tau)$。参数表示（$I$，$\overline{r}$）和（$J$，$\overline{\rho}$）确定各种定向曲线。曲线γ的任何参数表示通过具有正导数的参数变换与（I，$\overline{r}$）或（J，$\overline{\rho}$）相关。

49. 必要性显然。证明充分性：设$\overline{r}_0$是已知函数的任意确定值，$\overline{n}$为垂直已知平面的单位矢量，则 $\partial_u\overline{r}\cdot\overline{n}=0$，$\partial_v\overline{r}\cdot\overline{n}=0$，再看函数 $f(u,v)=(\overline{r}(u,v)-\overline{r}_0)\cdot\overline{n}$，有 $\partial_u f=\partial_u\overline{r}\cdot\overline{n}=0$，$\partial_v f=\partial_v\overline{r}\cdot\overline{n}=0$，这就是说：

$f(u,v)=$常数，但 $f(u_0v_0)=(\overline{r}_0-\overline{r}_0)\cdot\overline{n}=0$，因此 $f(u,v)\equiv 0$，即 $(\overline{r}-\overline{r}_0)\cdot\overline{n}=0$，这是平面的

方程。

50. 抛物柱面。

51. 椭圆柱面。

52. 双曲柱面。

53. 椭圆抛物面。

55. $x = R\cos u\cos v$， $y = R\cos u\sin v$，$z = R\sin u$ （图5）。

56. $x = a\cos u\cos v$， $y = b\cos u\sin v$，$z = c\sin u$ （图6）。

57. $x = \sqrt{p}\, u\cos v$， $y = \sqrt{q}\, u\sin v$，$z = u^2/2$ （图7）。

58. $x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v$， $y = b\,\mathrm{ch}\,u\sin v$， $z = c\,\mathrm{sh}\,u$ （图8）

59. $x = a\,\mathrm{sh}\,u\cos v$， $y = b\,\mathrm{sh}\,u\sin v$， $z = c\,\mathrm{ch}\,v$ （图9）

60. $x = a\cos v$， $y = b\sin v$， $z = u$ （图10）。

61. $x = u$， $y = u^2$， $z = v$ （图11）。

62. $x = a\,\mathrm{ch}\,u$， $y = b\,\mathrm{sh}\,u$， $z = v$ （图12）。

63. $x = a\,u\cos v$， $y = b\,u\sin v$， $z = cu$ （图13）

66. 1）不是。例如：对于矢函数：

$$x = \frac{2au^2}{1+u^2},\quad y = \frac{au(u^2-1)}{1+u^2},\quad z = v,$$

所指的集合是柱面，它的准线是环索线。

67. 1）去掉一条射线的平面。

2） $0 < r < \infty$， $0 < \varphi < 2\pi$。

3） $u = r\cos\varphi$， $v = r\sin\varphi$。

68．选取过点F_1，F_2（图14）并有由点F_1到点F_2为方向的直线为Ox轴，取线段F_1F_2的中点为坐标原点。那样，$F_1(-b, 0)$，$F_2(b, 0)$。对于所求图形的任意点

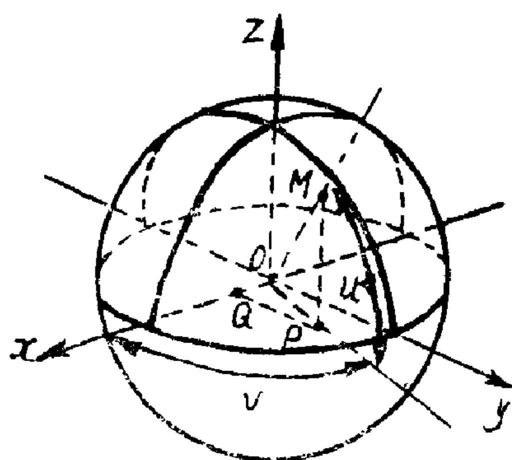


图 5

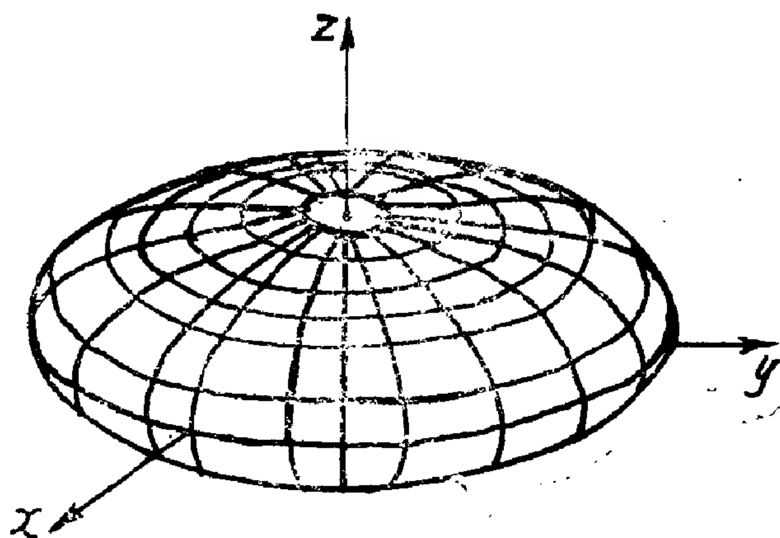


图 6

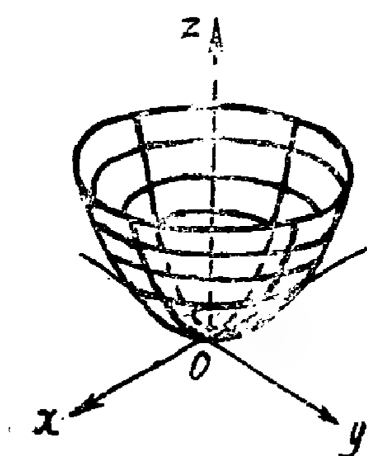


图 7

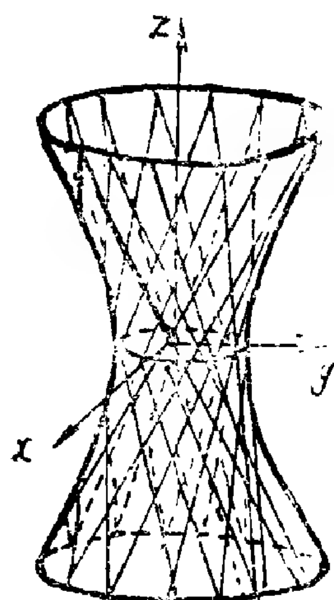


图 8

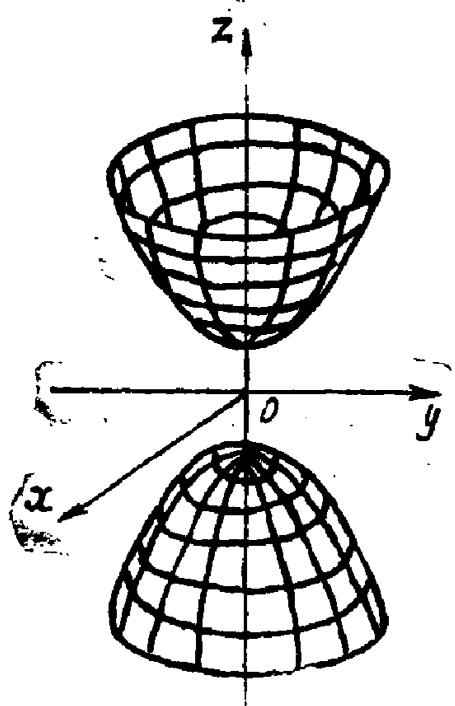


图 9

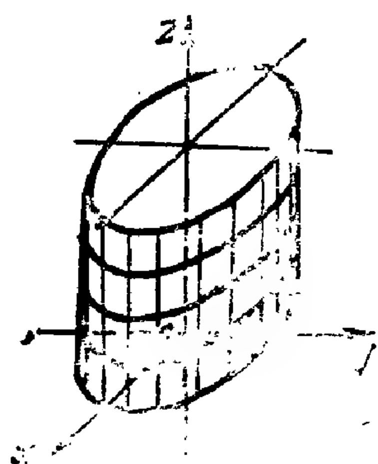


图 10

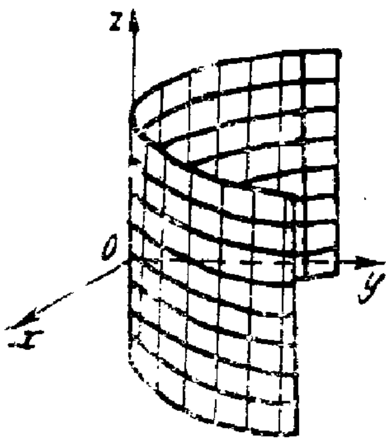


图 11

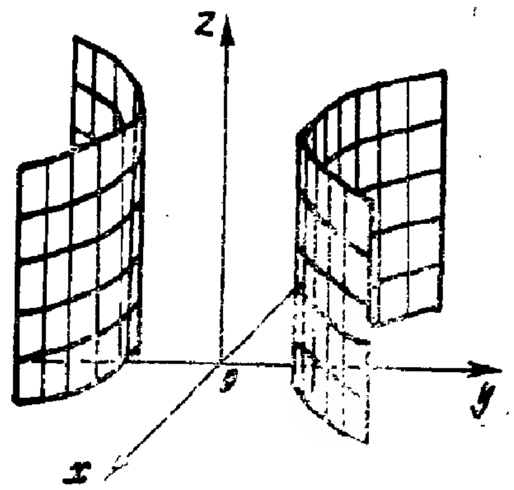


图 12

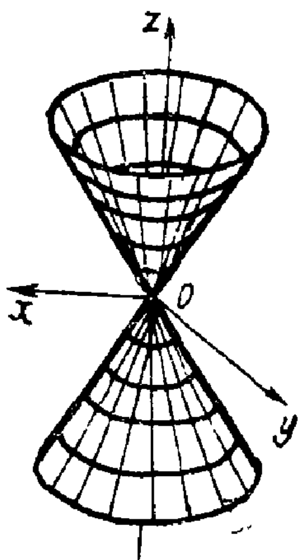


图 13

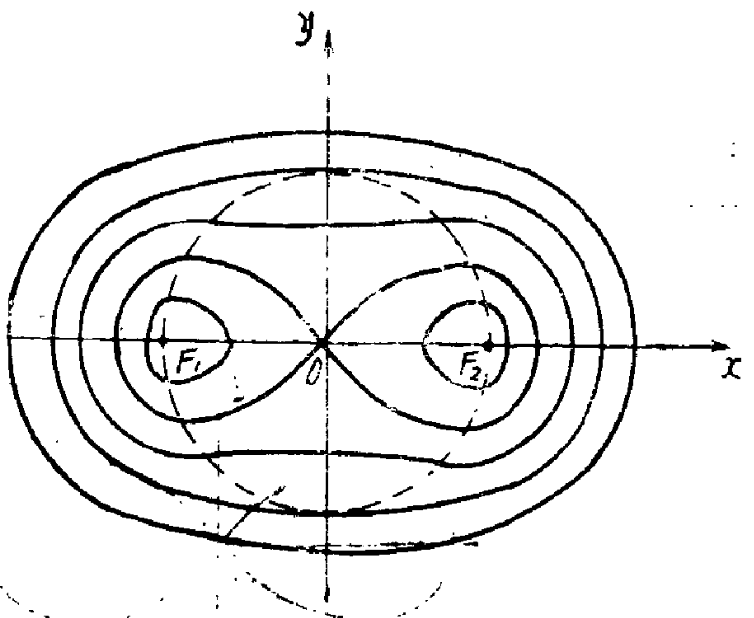


图 14

$M(x, y)$有

$$|F_1M| = \sqrt{(x+b)^2+y^2}, |F_2M| = \sqrt{(x-b)^2+y^2}$$

据题中条件：$\sqrt{(x+b)^2+y^2}\sqrt{(x-b)^2+y^2} = a^2$ (＊)

这就是所求图形的方程，去根号：

$$[(x+b)^2+y^2][(x-b)^2+y^2] = a^4。(＊＊)$$

显然，方程(＊)和(＊＊)是等价的，展开括号并合并同类项得：$(x^2+y^2)^2 - 2b^2(x^2-y^2) = a^4 - b^4$

这是卡西尼卵形线方程（图14）。用极坐标 $x = r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$ 代到这笛卡尔直角坐标表达式得：

$r = b\sqrt{\cos^2\varphi \pm \sqrt{\dfrac{a^4}{b^4} - \sin^2 2\varphi}}$。这就是所求图形的极坐标方程。

在 $a = b$ 时，图形称为贝努利双纽线（图15），它的方程是 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$，$r^2 = 2a^2\cos\varphi$，在 $a < b$ 时，图形既不是曲线的象，也不是线。贝努利双纽线（$a = b$）是曲线的象，但不是线。在 $a > b$ 时，卡西尼卵形线是线和曲线的象。

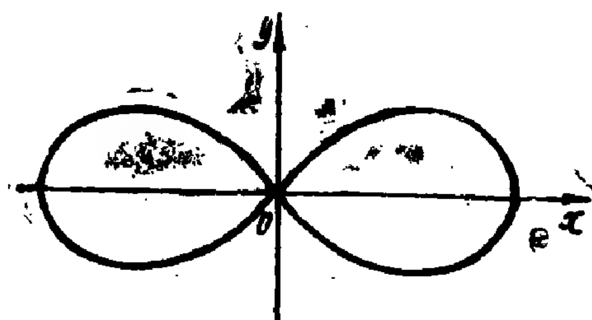


图　15

69. $x^3=y^2(2a-x)$，$r=2a\sin^2\varphi/\cos\varphi$，(图16)，方程的参数表示能化为：$x=2a\sin^2\varphi$，

$y=2a\sin^3\varphi/\cos\varphi$， 或 $x=\dfrac{2a}{1+t^2}$，$y=\dfrac{2a}{t(1+t^2)}$

$(t=\operatorname{ctg}\varphi)$：

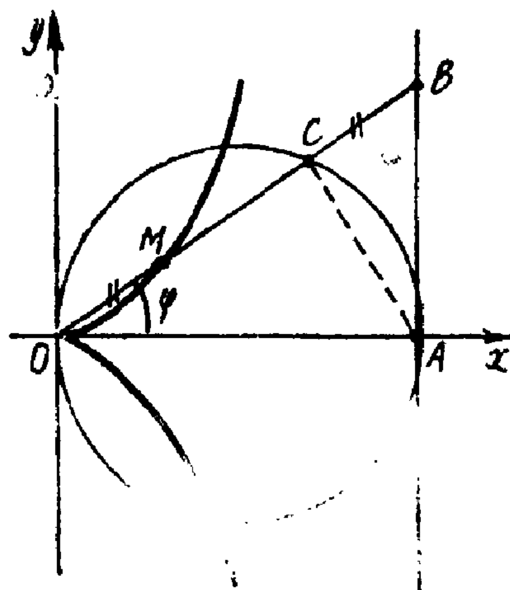


图 16

基阿克列斯蔓叶线不是线。

70. $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$；$x=a\operatorname{ctg}t$，$y=a\sin^2t$ (图17)

71. $r=a\varphi$ (图18)

72. $r=r_0e^{k\varphi}$，其中$\varphi=\omega t$ (图19)。

73. $(x^2+y^2)^3-4a^2x^2y^2=0$，$r=a\sin2\varphi$(图20)。四叶玫瑰线是曲线的象，但不是线。

74. $r=2a\cos\varphi\pm2b$，$(x^2+y^2-2ax)^2=4b^2(x^2+y^2)$(图21)，对于心脏线$b=a$ (图22)。巴

斯卡蚶线在 $b > a$ 时是线。

75. $r = \dfrac{a(1 \pm \sin\varphi)}{\cos\varphi}$； $y^2 = \dfrac{x(x-a)^2}{2a-x}$，

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}, \quad t = \frac{r}{a}。$$

环索线Φ（图23）是曲线但不是线，图形$\Phi \setminus A$是线但不是曲线。

76. $r = \dfrac{a}{\sin\varphi} \pm l$； $(x^2+y^2)(y-a)^2 - l^2y^2 = 0$（图24）。

任何尼哥明达蚌线都不是曲线的象，在 $l < a$ 时蚌线是线。

77. $x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$； $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$（图25）。不是。

78. $x = a(\cos t + t\sin t)$，$y = a(\sin t - t\cos t)$。

提示：在解开之前线的端点位于A点（图26），在解开时把线拉成与圆的切线重合，而且切线的长度。

$$|BM| = \overset{\frown}{BA} = at。$$

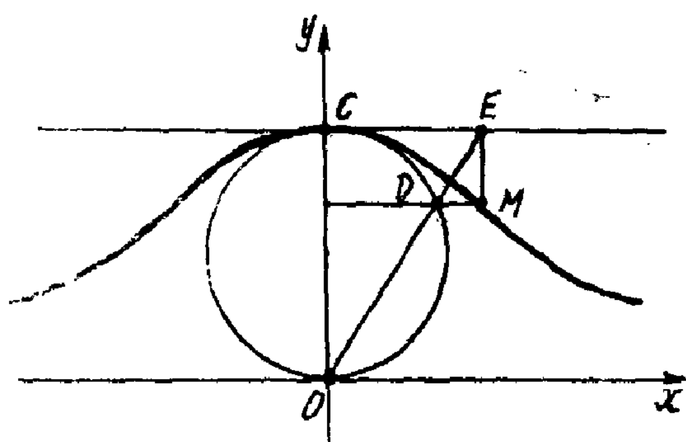


图 17

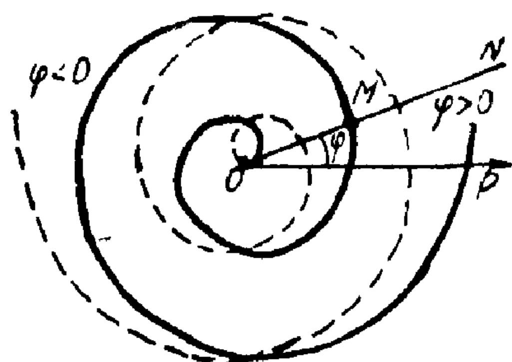


图 18

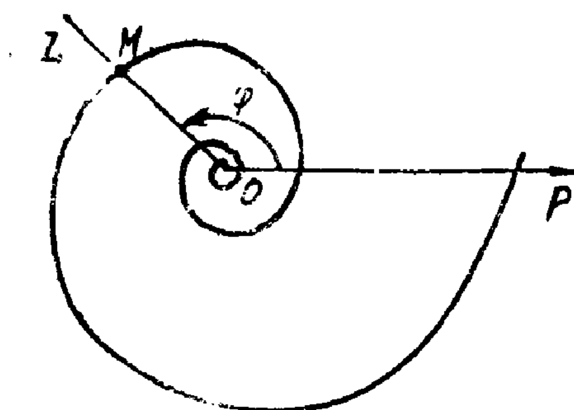


图 19

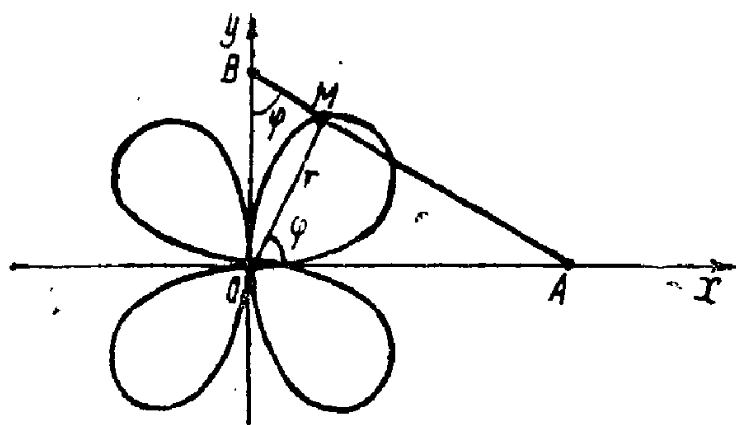
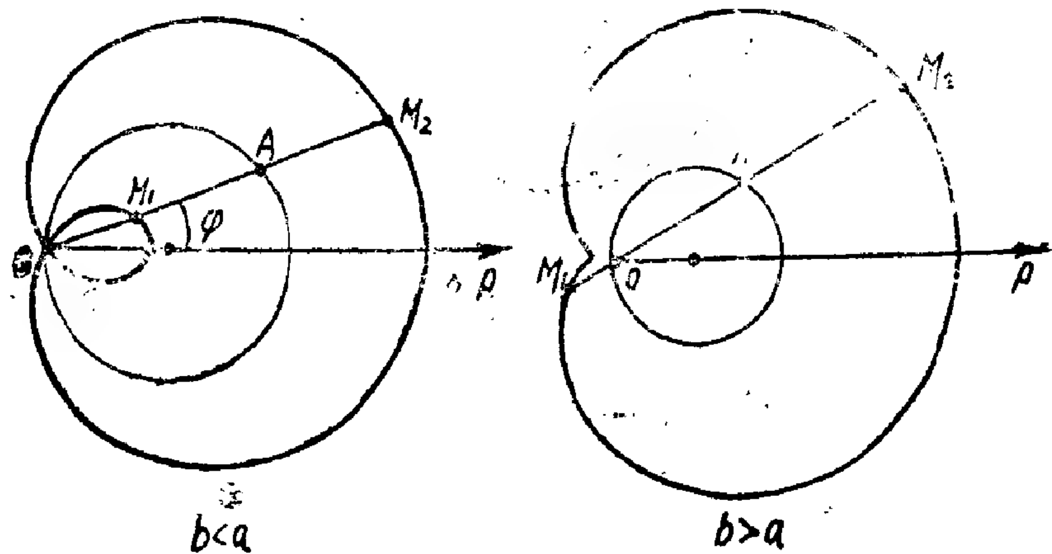
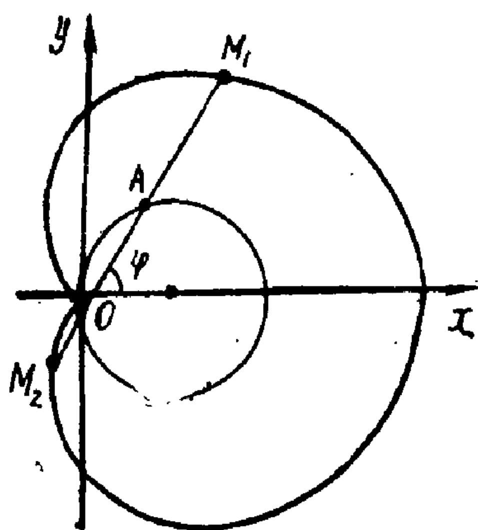


图 20



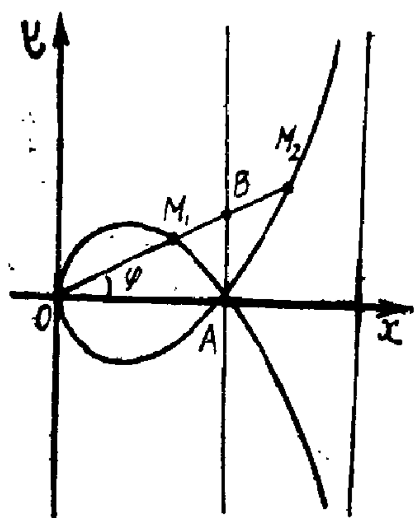
M_2
A
M_1
φ
ρ
b<a
M_2
M_1
0
ρ
b>a

图 21



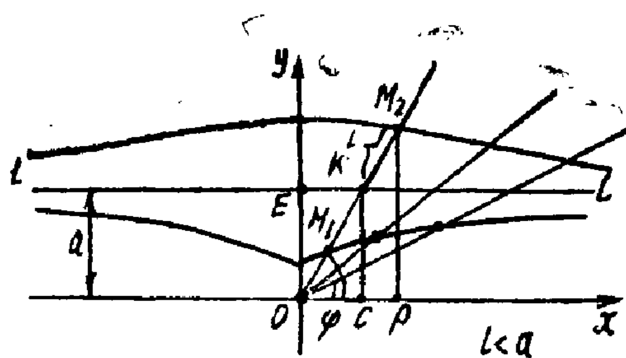
y
M_1
A
φ
O
x
M_2

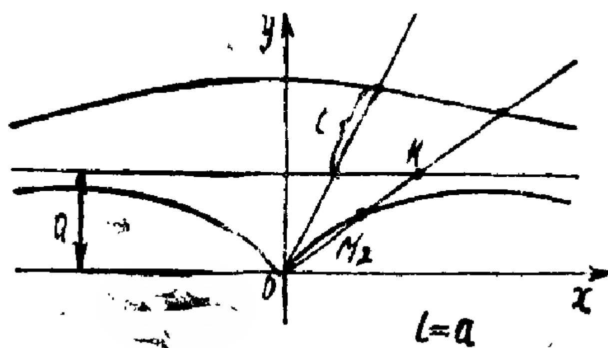
图 22



y
M_2
B
M_1
φ
0
A
x

图 23





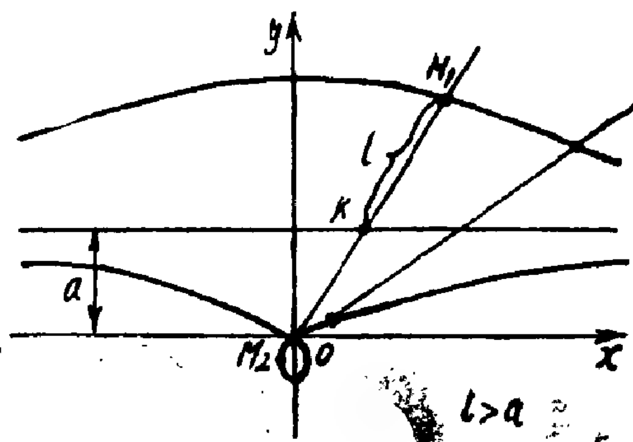


图 24

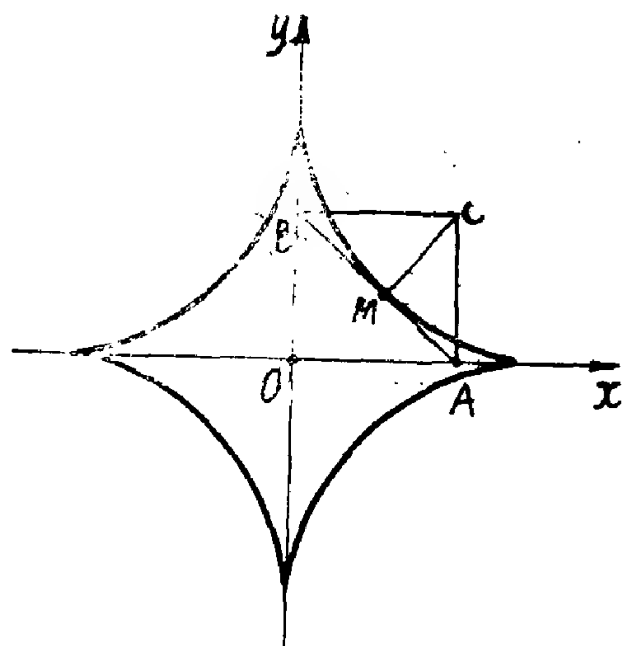


图 25

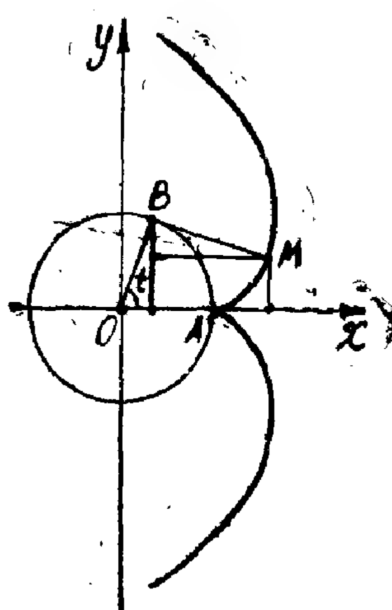


图 26

79. 建立摆线方程。取已知直线为O x轴，并假设M点的起始位置与坐标原点重合（图27）。考察点M(x，y)的任意位置，设在某一时刻圆心位于C点，t为圆半径CM与由C向O x轴所作的垂线CP之间的夹角，并设S是点M在O x轴上的投影，N是点M在CP上的投影，那么

$$x = OS = OP - SP = \overset{\frown}{MP} - SP = at - a\sin t$$
$$= a(t - \sin t)。$$

类似地有

$$y = SM = PN = PC - NC = a - a\cos t$$
$$= a(1 - \cos t)。$$

在一般情况下：

$$x = at - d\sin t,\quad y = a - d\cos t$$（图28）。

80. 取定圆圆心为坐标原点，假定M点的起始位置在A

点，在A点滚动圆与定圆相切，而横坐标轴指向A点(图29)

引用符号：$t=\widehat{MO_1N}$，$m=r/R$。因为

$$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{MN} \quad 或 \quad R\cdot\widehat{NOA}=rt$$

那么 $\widehat{NOA}=\dfrac{r}{R}t=mt$

故可有：$x=OP=OD+DP=OD+EM$

$$=(R+r)\cos mt+r\sin\widehat{MO_1E}$$

$$y=MP=O_1D-O_1E$$

$$=(R+r)\sin mt-r\cos\widehat{MO_1F}。$$

因为$\sin\widehat{MO_1E}=\sin(t-\widehat{OO_1D})=\sin\left[t-\left(\dfrac{\pi}{2}-mt\right)\right]$

$$=-\cos(t+mt)$$

$\cos\widehat{MO_1E}=\sin(t+mt)$，$r=mR$

所以$x=(R+mR)\cos mt-mR\cos(t+mt)$

$y=(R+mR)\sin mt-mR\sin(t+mt)$

消去m得：

$$x=(R+r)\cos\frac{r}{R}t-r\cos\frac{R+r}{R}t,$$

$$y=(R+r)\sin\frac{r}{R}t-r\sin\frac{R+t}{R}t$$ （图30）。

在$r=R$时得到心脏线（图31）。

81. $x=(R-mR)\cos mt+mR\cos(t-mt)$，

$y=(R-mR)\sin mt-mR\sin(t-mt)$，

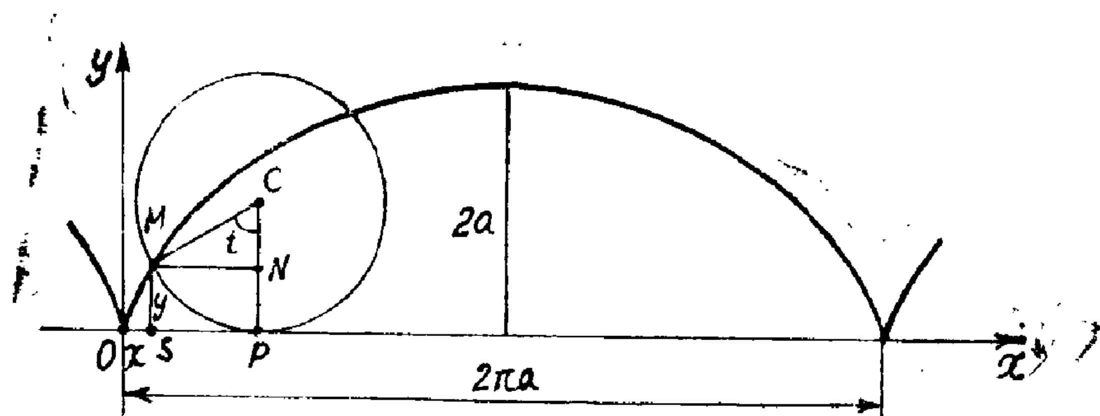
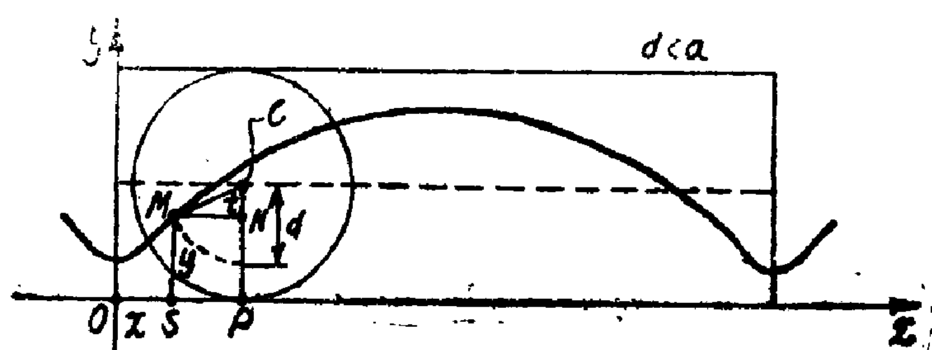


图 27



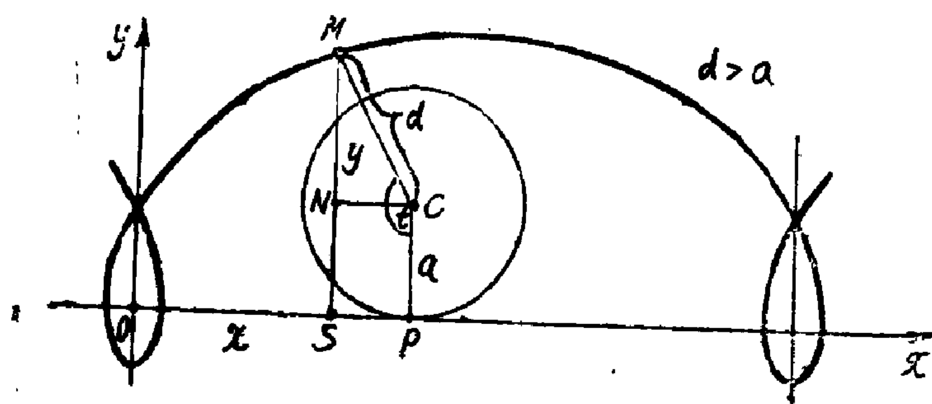


图 28

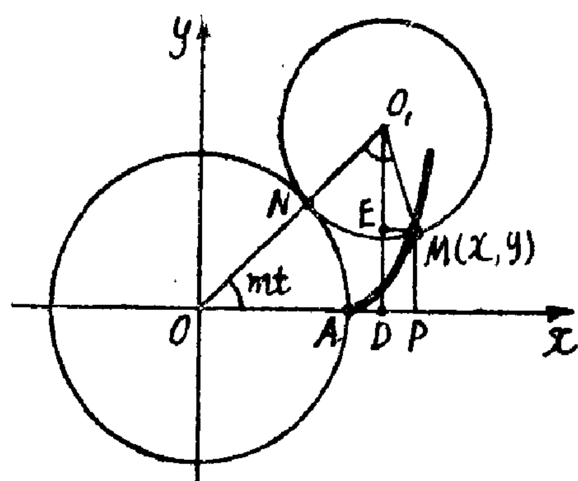


图 29

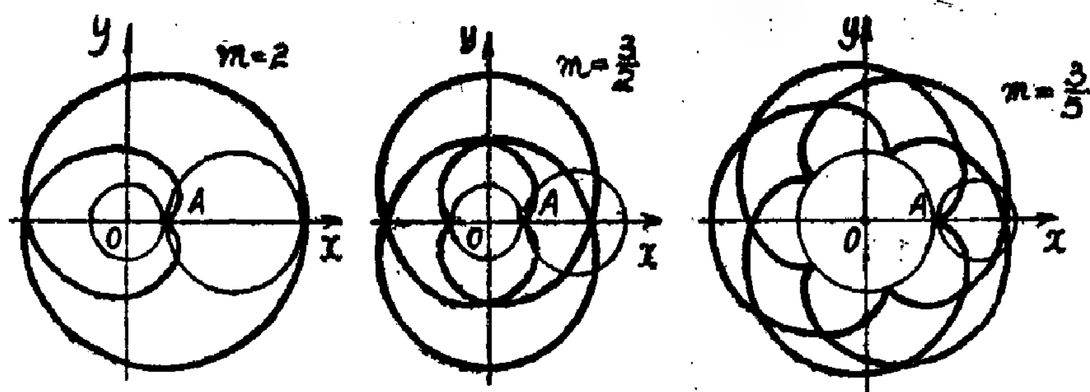


图 30

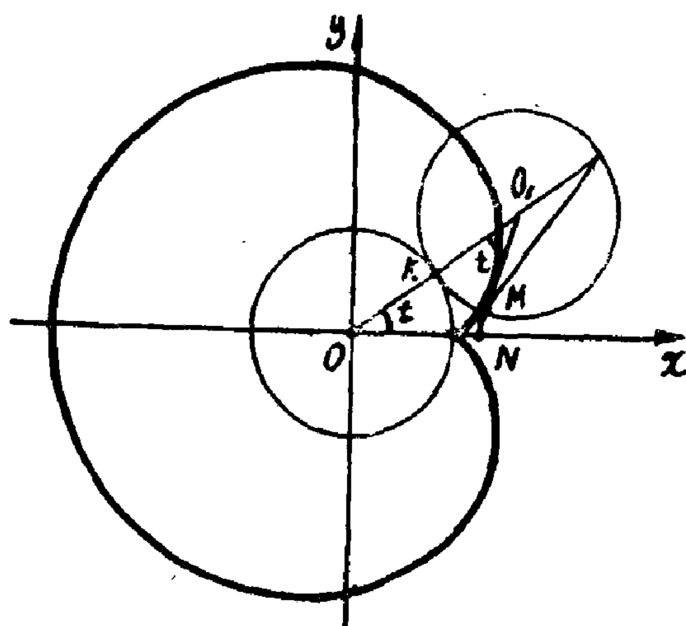


图　31

$r = mR$。

在 $R = 4r$ 时得星形线，在 $R = 2r$ 时为直线段（图32）。

82．点M和N位于曲线的象上，点P不在曲线的象上。曲线交Ox轴于点O(0，0)，交Oy轴于点O(0，0)和A(0，-2)上。隐式方程：$y^3 + 2y^2 - x^2 = 0$。

83．1）$x = \frac{2a}{1+k^2}$，$y = \frac{2ak}{1+k^2}$，

2）$x = a + a\cos\varphi$，$y = a\sin\varphi$。

84．抛物线。

85．直线 $x - y - 2 = 0$ 的一部分，其中 $x \geqslant 2$。

86．夹在坐标轴之间的直线段 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$。

87．半圆。

88. 双曲线的一支。

89. 直线 $x+2y-1=0$。

90. $y=a\,\mathrm{ch}(x/a)$——悬链线（图33）。

91. 圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$。

92. $t=\mathrm{ch}\varphi+\mathrm{sh}\varphi$（图34）。

93. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。假定 $t=\mathrm{tg}(\theta/2)$，就得到一个表示式到另一个表示式的变换（图35）。

94. 圆 $x^2+y^2=16$。

95. 圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$。

96. 直线 $x=a$。

97. 直线 $x=b$。

98. 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$。

99. 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$。

100. 抛物线 $y^2=4x+4$。

101. 双曲线 $x^2-y^2=a^2$。

102. 圆 $x^2+y^2-by=0$。

103. 抛物线 $y^2=-4x+4$。

104. 抛物线 $y^2=4x+4$。

105. $x=-\frac{\varphi_{n-1}(1,t)}{\varphi_n(1,t)}$，$y=-\frac{t\varphi_{n-1}(1,t)}{\varphi_n(1,t)}$。

提示：取过坐标原点和曲线点的直线 $y=tx$ 的斜率为参数。

106. $x=\frac{2a}{1+t^2}$，$y=\frac{2at}{1+t^2}$。

107. $x=\frac{3at}{1+t^2}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$；曲线称为笛卡尔叶形线（图36）。

108. $x=\frac{2at^2}{1+t^2}$, $y=\frac{2at^3}{1+t^2}$；基阿克列斯蔓叶线。

109. $x=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi$,
$y=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$。

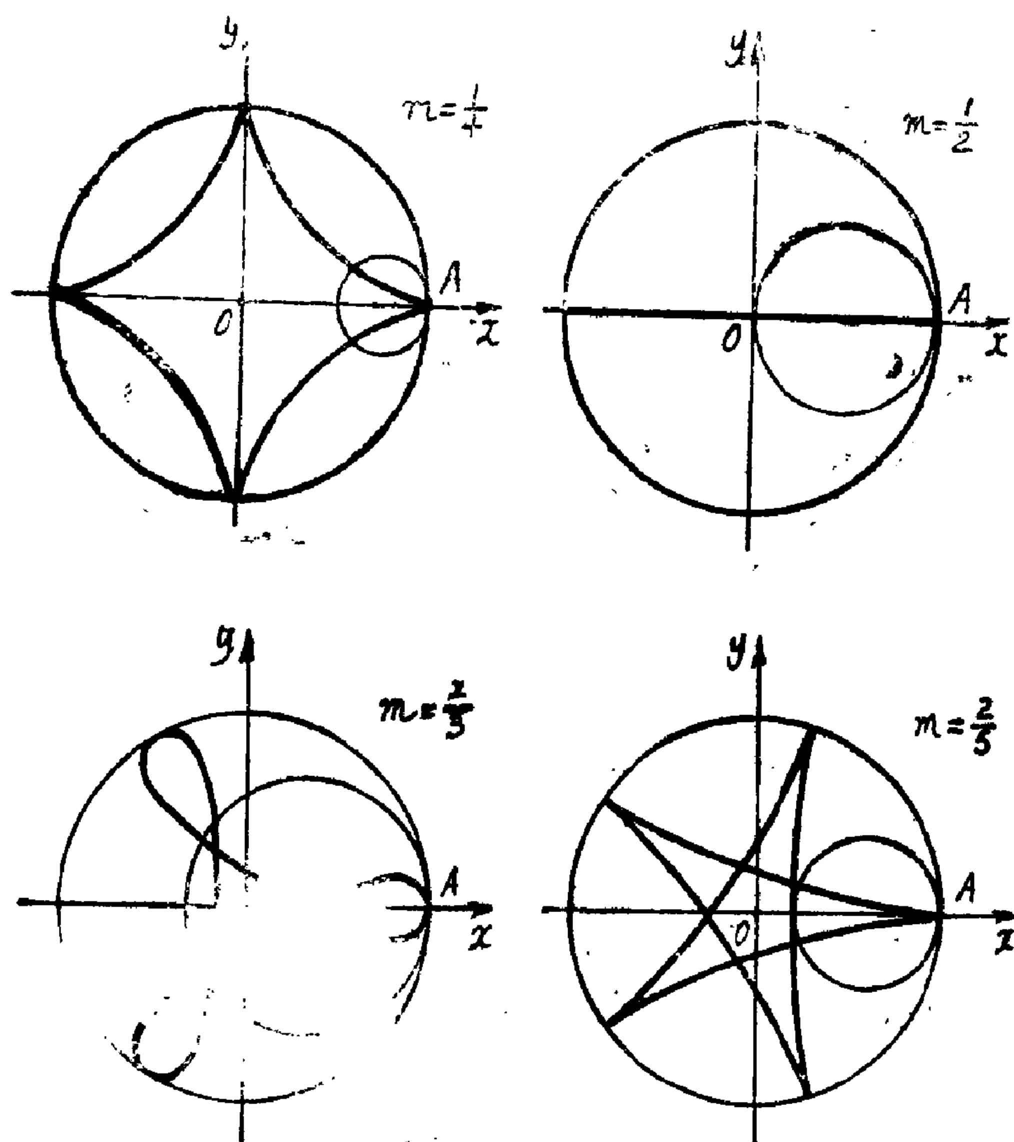


图 32

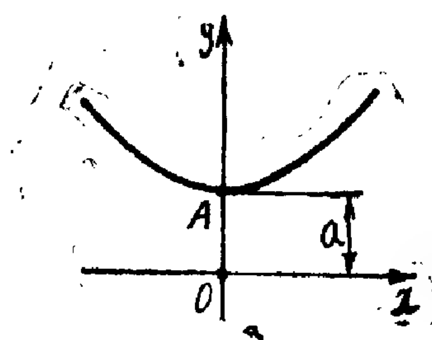


图 33

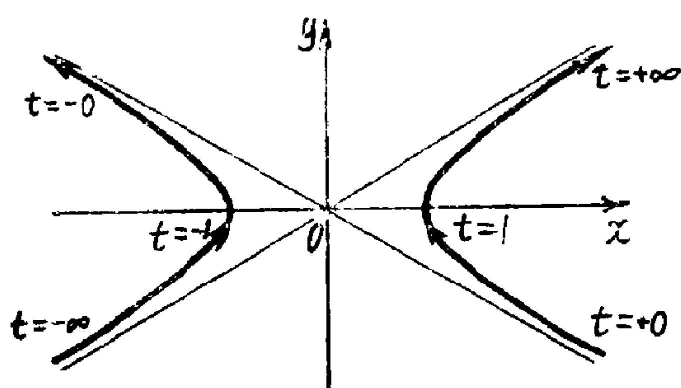


图 34

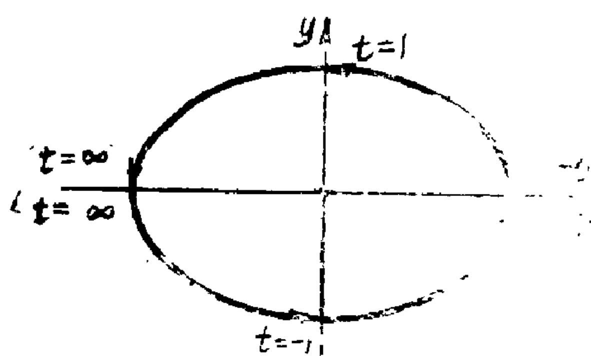


图 35

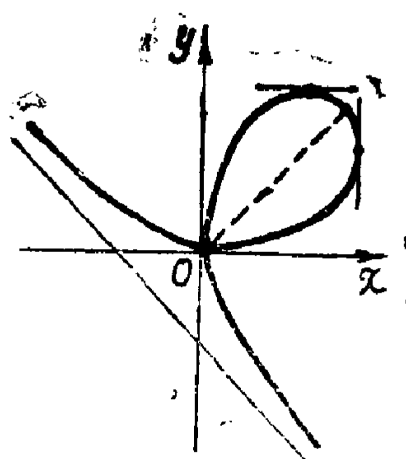


图 36

设tg(θ/2) = t，得心脏线方程：

$$x=\frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2},\quad y=\frac{4at}{(1+t^2)^2}。$$

110. $x=\frac{a(t^2-1)}{t^2+1}$，$y=\frac{at(t^2-1)}{t^2+1}$——环索线。此方程可由75题的方程通过变换 $x=x'+a$，$y=y'$ 而得到。

111. 在点A处切线为 $2x-y+2=0$，法线为 $x+2y+1=0$；
在点B处切线为 $4x-y+3=0$，法线为 $x+4y-12=0$
在点C处切线为 $6x-y+2=0$，法线为 $x+6y-49=0$

112. 在点A处切线为 $y=0$，法线为 $x=0$；在点B处切线为 $3x-y-2=0$，法线为 $x+3y-4=0$。

113. 在点A(0，0)处切线为 $y=x$，法线为 $x=-y$；在点B（$\pi/2$，1）处切线为 $y=1$，法线为 $x=\pi/2$；在点C（π，0）处切线为 $x+y-\pi=0$，法线为 $x-y-\pi=0$。

114. 在点A(0，0)处切线为 $y=x$，法线为 $y=-x$；在点B（$\pi/4$，1）处切线为 $2x-y+1-\frac{\pi}{2}=0$，法线为 $x+2y-2-\frac{\pi}{4}=0$。

115. 切线为 $2x-y+4=0$，法线为 $x+2y-3=0$

116. 切线为 $2x\sin t+2y\cos t-a\sin 2t=0$，法线为 $x\cos t-y\sin t-a\cos 2t=0$。

117. 当 $t=(2k+1)\pi$ 时，其中k为任意整数，切线为 $y=2a$，法线为 $x=(2k+1)a\pi$。在所有其它点

处切线为 $x-y\,tg(t/2)+a(2\,tg(t/2)-t)=0$，法线为 $x\,tg(t/2)+y-at\,tg(t/2)=0$。

118．切线为 $x=a(\cos t-\lambda\sin t)$，$y=b(\sin t+\lambda\cos t)$，或 $bx\cos t+ay\sin t-ab=0$，法线为 $x=(a+b\lambda)\cos t$，$y=(b+a\lambda)\sin t$ 或 $ax\sin t-by\cos t+(b^2-a^2)\sin t\cos t=0$。

119．切线 $x=\frac{a}{2}(t+\frac{1}{t})+\lambda\frac{a}{2}(1-\frac{1}{t^2})$，

$y=\frac{b}{2}(t-\frac{1}{t})+\lambda\frac{b}{2}(1+\frac{1}{t^2})$，

或 $\frac{b}{2}(t+\frac{1}{t})x-\frac{a}{2}(t-\frac{1}{t})y-ab=0$，

法线：$x=\frac{a}{2}(t+\frac{1}{t})-\frac{\lambda b}{2}(1+\frac{1}{t^2})$，

$y=\frac{b}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{\lambda a}{2}(1-\frac{1}{t^2})$，

或 $\frac{a}{2}(t-\frac{1}{t})x+\frac{b}{2}(t+\frac{1}{t})y-\frac{t^4-1}{4t^2}(a^2+b^2)=0$。

120．切线 $x+y-3a=0$，法线 $x-y=0$。

121．切线 $4x-2y-a=0$，法线 $2x+4y-3a=0$。

122．切线 $x(x^2+y^2-a^2)(X-x)+y(x^2+y^2+a^2)(Y-y)=0$，法线 $y(x^2+y^2+a^2)(X-x)-x(x^2+y^2-a^2)(Y-y)=0$。

123．切线 $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1$，

法线 $\frac{(X-x)a^2}{x}-\frac{(Y-y)b^2}{y}=0$。

124. 切线 $\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}=1$,

法线 $\frac{(X-x)a^2}{x}+\frac{(Y-y)b^2}{y}=0$。

125. 切线 $yY=P(X+x)$,

法线 $y(X-x)+P(Y-y)=0$。

126. 切线 $(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)x-(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)y-a\varphi^2=0$,

法线 $(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)x+(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)y-a\varphi=0$。

127. 切线：$y-a=0$，法线：$x-a=0$。

128. $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$。

129. 不能。

131. $y=4x-4$。

132. $A(2,-3)$。

133. $b=-1$，$c=-1$。

134. $M_1(2/3,4/9)$。$M_2(2/3,8/27)$。

136. $y=2x+3$，$y=2x+\frac{49}{27}$。

137. $y+1=(x+7)/8$。

139. $(x\pm y)\sqrt{2}=-a$，$(x\pm y)\sqrt{2}=a$。

143. $M_1(0,0)$，$M_2(4,4)$；

$\varphi_1=\pi/2$，$\varphi_2=\mathrm{arctg}(3/4)$。

144. $M_1(0,3)$，$M_2(0,-3)$；$\varphi_1=\varphi_2=\frac{\pi}{4}$。

145. $M_1(1,2)$，$M_2(1,-2)$；$\varphi_1=\varphi_2=\frac{\pi}{2}$。

146. $M_k\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\ (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\varphi_k=\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$ 其中k为任意整数。

152. 由$\triangle M_1M_2A$（图37）得$\mu_1=\varphi/2$（参看151题）$\mu_2=(\varphi+\pi)/2$，$\widehat{M_1AM_2}=\mu_2-\mu_1=\pi/2$。

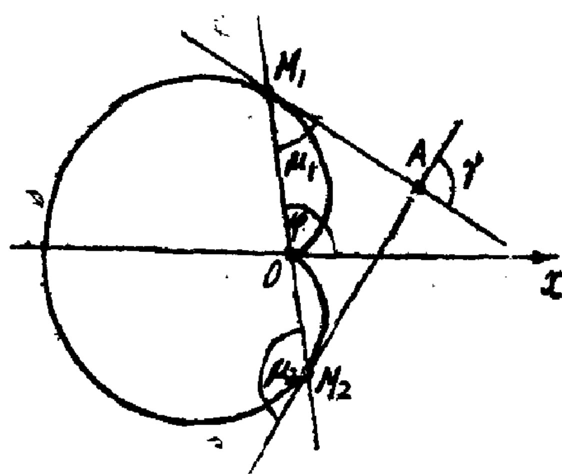


图 37

160. 在切线方程$Y-y=y'(X-x)$中，假设$Y=0$ $X=x_T$，得到$x_T-x=-y/y'$，因此$|PT|=|y/y'|$（图38）。其余式子用类似方法可得到。

161. $|MT|=\sqrt{5}/2$，$|PT|=1/2$，$|MN|=\sqrt{5}$，$|PN|=2$。

162. $|MT|=|\operatorname{cth}x|\operatorname{ch}x$，$|PT|=|\operatorname{cth}x|$，$|MN|=\operatorname{ch}^2x$，$|PN|=|\operatorname{sh}2x|/2$。

163. $y^2=\pm2kx+c$，其中c为任意常数。

164. $y = c e^{\pm x/k}$，其中 c 为任意常数。

166. $x = a(\ln tg(t/2) + \cos t) + c$，$y = a\sin t$，其中 t 是切线与横轴正向的夹角。这是一个全等曲线族，曲线称为曳物线，图39表示对应于 c = 0 的曳物线。

167. $S = \pi a^2/2$

168. 由直角三角形MOT(图40)有$|OT| = |OM| tg\ \mu$，考虑到$tg\mu = |r/r'|$(参看150题)，得$|OT| = r^2/|r'|$。其余式子用类似方法可得到。

169. $r = \pm\dfrac{k}{\varphi - \varphi_0}$，其中$\varphi_0$为任意角(在图41中角$\varphi_0 = 0$)。这类曲线称为双曲螺线。

170. 阿基米德螺线。

171. $r = \pm k\sin(\varphi - \varphi_0)$——圆（参看102题）。

177. 二阶切触。

178. 一阶切触。

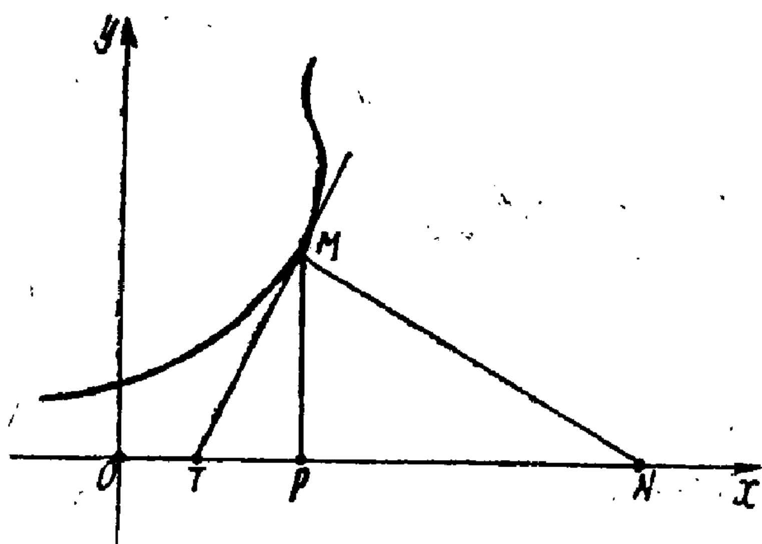


图 38

图 39

图 40

180. 三阶。

181. $y = x^2 - 3x + 3$。

182. $x^2 + y^2 - y = 0$。

183. $(x + 2y)^2 - 20x + 14y + 19 = 0$。三阶切触。

184. 如果 $f(x)$在 $x = 0$ 处具有直到n阶的导数，则此题有解

$$y = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

否则此题无解。

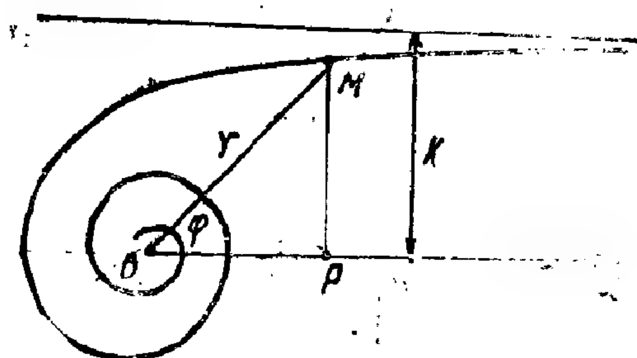


图 41

185. 1) $\frac{(x-\pi R)^2}{12R^2}+\frac{(y+R)^2}{9R^2}=1$，五阶切触；

2) $\frac{(x-\pi R)^2}{-12R^2}+\frac{(y-5R)^2}{9R^2}=1$，五阶切触；

3) $(x-\pi R)^2=-8R(y-2R)$，三阶切触。

186. $x=3$，$y=0$。

187. $x=\pm 4$，$y=0$。

188. $y=0$。

189. $y=x-4$，$x=0$。

190. $y=x-2$，$x=-2$。

191. $x=0$。

192. $x=3$，$y=-4$，$y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$。

193. $y=-\frac{1}{2}$，$y=2x+\frac{1}{2}$。

194. $x=-\frac{1}{2}$，$2x-4y-3=0$。

195. $x=\pm 2$, $x=1$。

196. $x=0$。

197. $y=\pm x$。

198. $y=a$。

199. $y=2a$。

200, 201. O(0, 0)——自交点。

202, 203. O(0, 0)——孤立点。

204. O(0, 0)——自切点。

205. O(0, 0)——第一类尖点。切线 $y=0$。

206. O(0, 0)，在 $1>a$ 时为具有切线 $y=\pm\frac{ax}{\sqrt{1^2-a^2}}$ 的自交点，在 $1<a$ 时为孤立点，在 $1=a$ 时为具有切线 $x=0$ 的第一类尖点（参看图24）。

207. A(a, 0)——自交点，切线：$y=\pm(x-a)$。

208. O(0, 0)——自交点，切线：$y=\pm x$。

209. A(0, 0)——第一类尖点，切线 $y=0$。

210—212. 不存在（图42—44）。

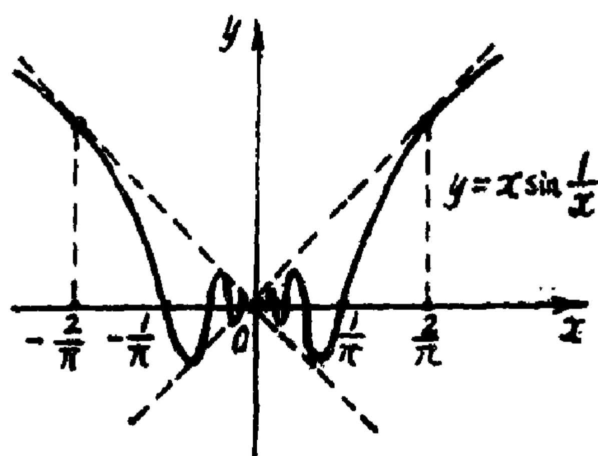


图 42

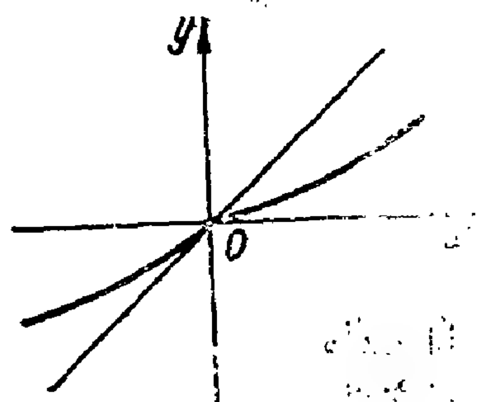


图 43

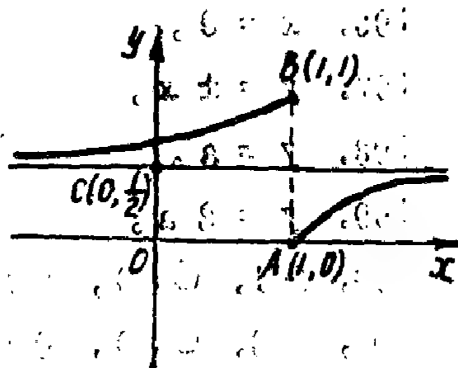


图 44

214. $r\ddot{r}-2\dot{r}^2-r^2=0$。

215. 函数对于除 $x=\pm1$ 外的所有 x 值有定义。没有奇异点。在坐标原点曲线与 Ox 轴相切。渐近线为 $x=\pm1$，$y=1$。曲线关于 Oy 轴对称（图45）

216. 函数仅在 $x=\pm\sqrt{3}$ 时无定义，$y_{max}=y(-3)=-\frac{9}{2}$，$y_{min}=y(3)=\frac{9}{2}$，这里和今后所说的是局部极值。$O(0,\ 0)$为具有水平切线的拐点。渐近线为 $y=x$，$x=\pm\sqrt{3}$（图46）。

217. 函数仅在 $x=1$ 无定义。坐标原点是具有切线 $y=0$ 的拐点。在点 $M\left(-3,\ \frac{-27}{8}\right)$ 切线平行 Ox 轴。渐近线为 $x+1=0$，$x-2y-2=0$（图47）。

218. 函数在 $x=\pm2$ 无定义。$O(0,0)$是具有切线 $y=0$ 的拐点。渐近线为 $x=\pm2$，$y=0$（图48）。

219. 定义域是］0，5［；$M\left(\frac{5}{\sqrt[3]{4}},\ \frac{5}{\sqrt[3]{4}}\right)$ 是具有对

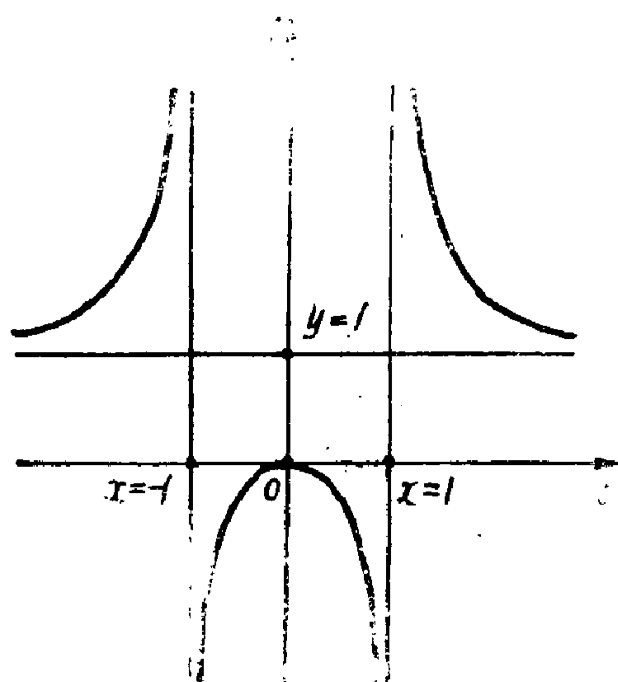


图 45

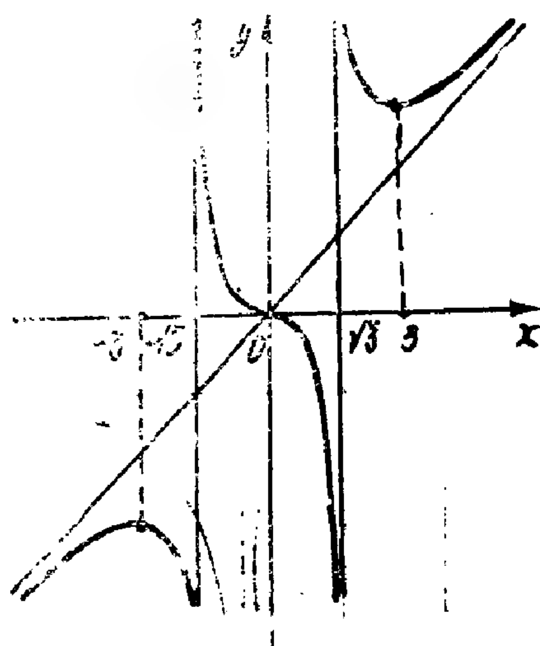


图 46

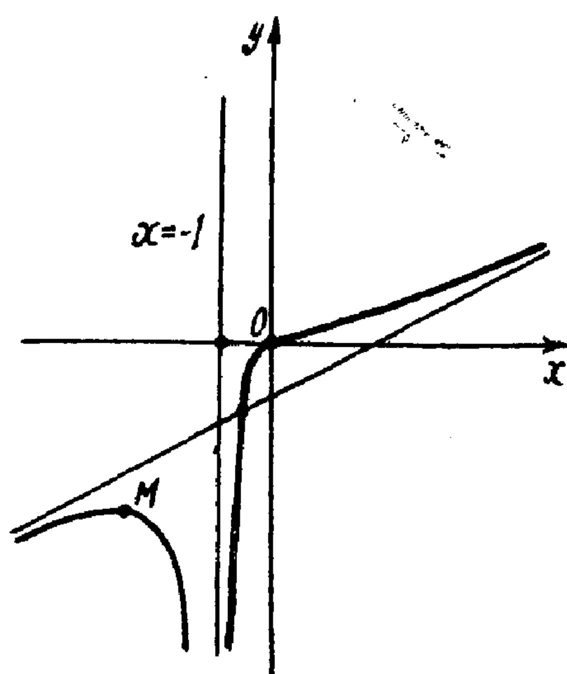


图 47

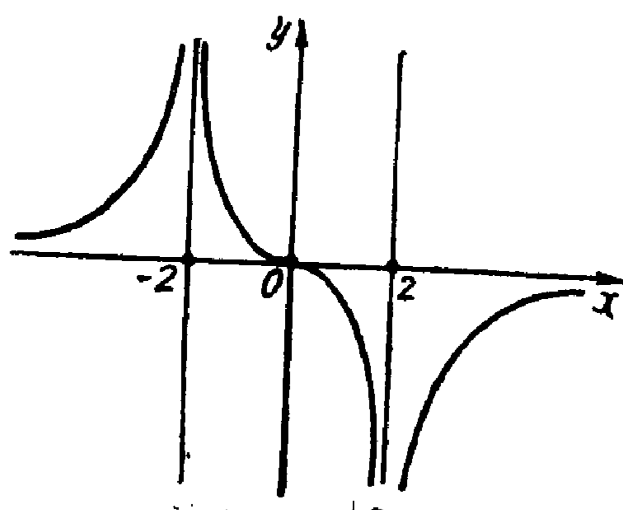


图 48

O x 轴倾斜角为135°的切线的拐点。渐近线为 $x=0$。（图49）

220. 在 $x>0$ 时函数有定义；$y_{max}=y(e)=\frac{1}{e}$；$M(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}})$ 为拐点。渐近线为 $x=0$，$y=0$（图50）。

221. 函数在所有 x 有定义并为正值；$y_{max}=y(0)=1$；$M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$，$M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 为拐点。渐近线为 $y=0$（图51）。

222. 函数在除 $x=0$ 外的所有 x 值有定义；点 $M(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2})$ 为拐点。渐近线为 $y=1$，$x=0$（图52）。

223. 曲线关于第一和第三坐标角的平分线对称。渐近线为 $x+y+a=0$；$O(0,0)$ 是具有切线 $x=0$，$y=0$ 的自交点（参看图36）。

224. 曲线是封闭的，没有奇异点。与轴的交点是 $O(0, 0)$，$M_1(\frac{1}{2}, 0)$。在点 $M_2(t=-1+\sqrt{2})$，$M_3(t=-1-\sqrt{2})$ 切线平行于 O x 轴。在点 $O(t=0)$，$M_4(t=\pm\infty)$ 切线平行于 O y 轴。写出曲线的隐式方程，容易证实，这是一个椭圆（图53）。

225. 曲线关于 O x 轴对称，并落在平面区域 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内。渐近线为 $x=1$。$O(0,0)$ 为第一类尖点（图54）。

226. 曲线关于 O x 轴对称并落在平面区域 $0\leqslant x<1$ 内。渐近线为 $x=1$；曲线交坐标轴于点 $O(0, 0)$，

$M_1(\frac{1}{2}, 0)$ 曲线两次经过点M_1（在 $t=\pm 1$ 时），在该点切线的斜率 $k=\pm 2$。没有奇异点。曲线在坐标原点的切线平行Oy轴，在点M_2和点M_3的切线平行Ox轴，点M_2和M_3上相应的参数值为 $t=\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$（图55）。

227. 在 $t=0$ 的点$O(0, 0)$，切线与Oy轴重合。在点$M_1(1, \frac{4}{3})$和$M_2(1, -\frac{4}{3})$（当 $t=\pm 1$）切线平行Ox轴。曲线两次过点$M_3(3, 0)$（$t=\pm\sqrt{3}$）。没有渐近线（图56）。

228. 渐近线为 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$，$y=x+1$。曲线与坐标轴仅交于坐标原点O（0，0），它是第一类尖点。在点O及在点M_1,M_2（$t=\pm\sqrt{3}$）切线平行Ox轴，在点M_3（$t=2$）切线平行Oy轴（图57）。

229. 曲线关于Ox轴对称。渐近线为 $x=-1$，$y=\pm(x-\frac{1}{2})$，第一条渐近线与曲线不相交，第二和第三条渐近线交曲线于点$M_1(t=-\frac{1}{2})$和$M_2(t=\frac{1}{2})$。O（0，0）为第一类尖点。在点M_3,M_4（$t=\pm\sqrt{3}$）的切线平行Ox轴（图58）。

230. 曲线关于Ox轴对称。没有渐近线和奇异点。在 $t=\pm\sqrt{3}/3$ 的点$M_1(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$和$M_2(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\sqrt{3})$是拐点，曲线在坐标原点与Oy轴相切（图59）。

231. 没有渐近线。O(0,0)是具有切线 $x=0$ 的第二

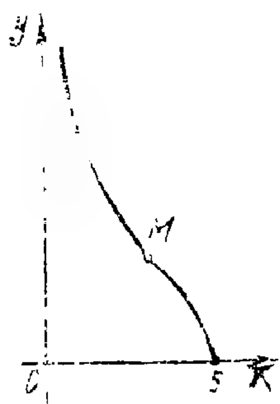


图 49

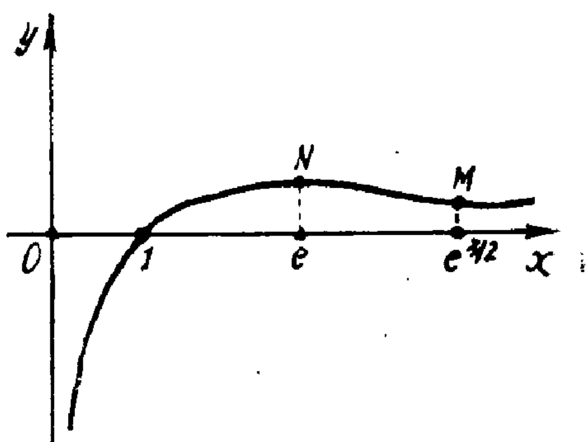


图 50

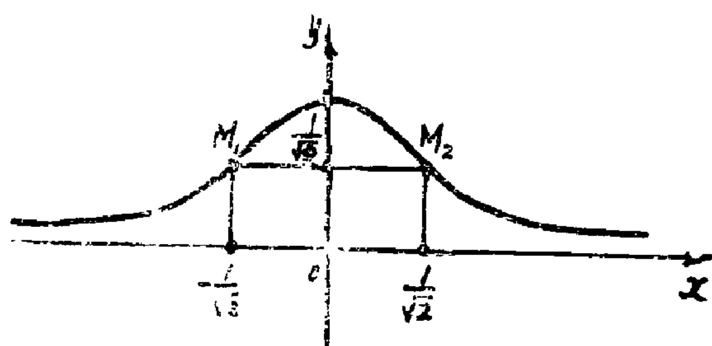


图 51

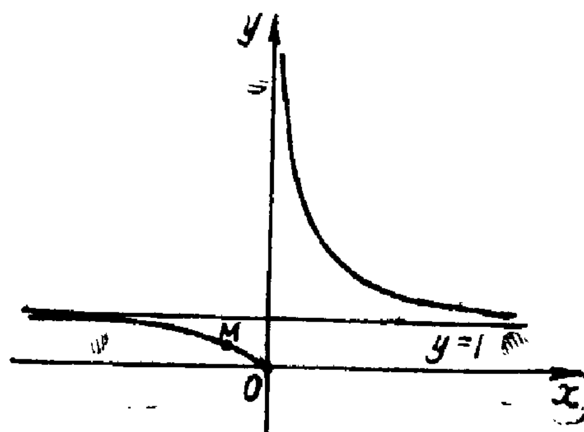


图 52

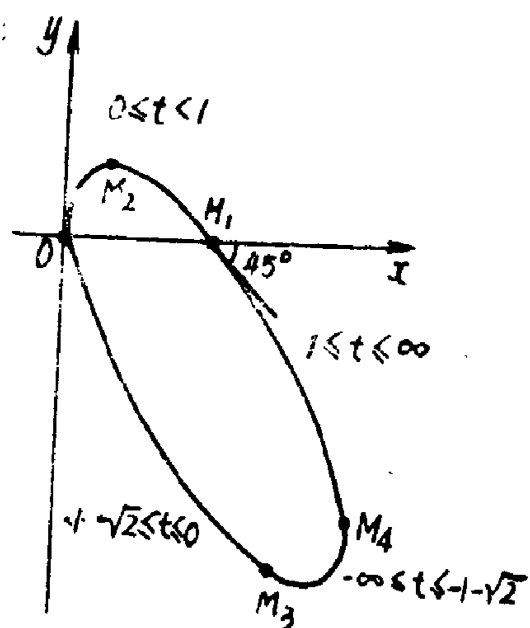


图 53

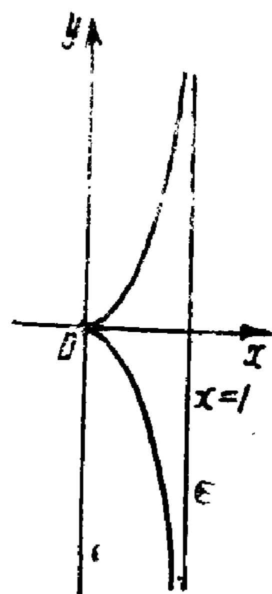


图 54

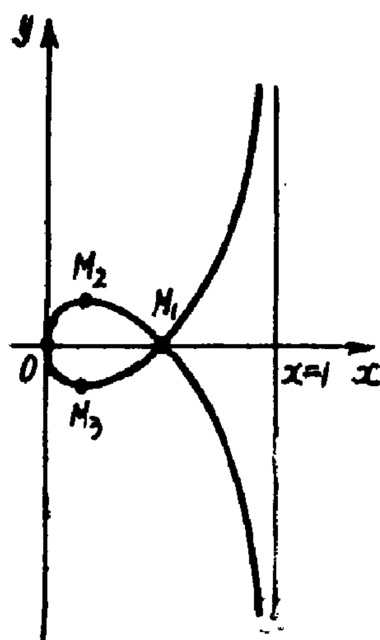


图 55

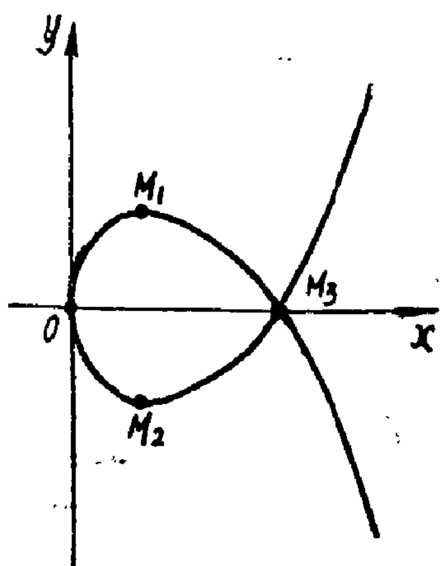


图 56

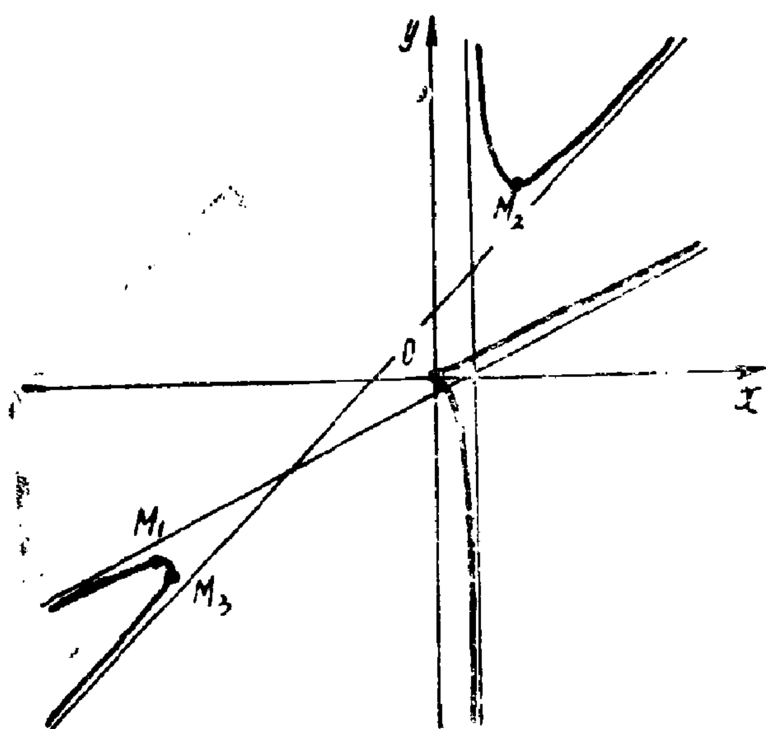


图 57

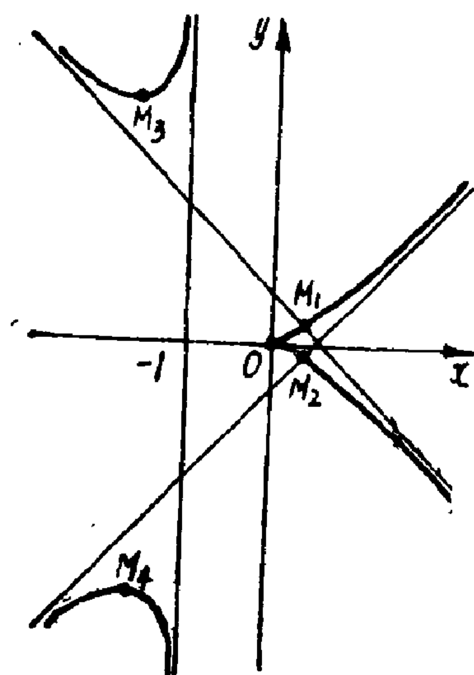


图 58

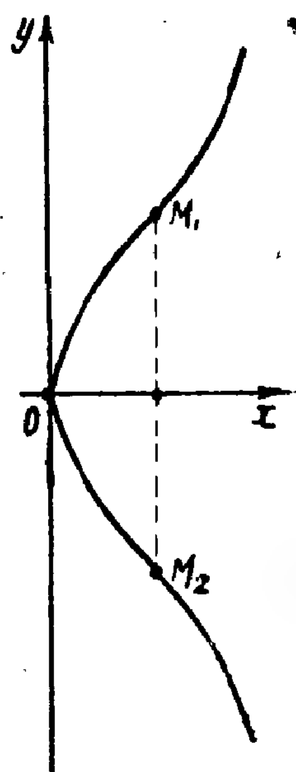


图 59

类尖点。曲线交O x 轴于点O和$M_1(1,0)$，点M_2（$t=-\sqrt[3]{0.8}$）为拐点。在点M_3（$t=\sqrt[3]{0.4}$）切线平行O x 轴。（图60）

232. 渐近线为$y=1$。O（0，0）为拐点，O点的切线与O y 轴重合。在点M（$t=5/4$）的切线平行O y 轴（图61）。

233. 渐近线为$x=0$，$x+y\pm 2=0$；O（0，0）为具有切线$x-y=0$的拐点（图62）。

234. 坐标原点是第二类尖点。与坐标轴的交点为O（0，0）和M（1，0）（图63）。

235. 曲线关于直线$y=x$对称。渐近线是$x+y-1=0$。坐标原点（当$t=0$）是具有切线O x 的第一类尖点。此外曲线包含坐标原点，在$t=\pm\infty$时切O y 轴（图64）。

236. 渐近线为$2x+9=0$，$2x-9=0$，$x-y-6=0$；$M_1(4,-4)$为具有切线$x+y=0$的第一类尖点。O x 轴切曲线于点M_2（16/3，0），O y 轴切曲线于点M_3（0，−16/3）（图65）

237. 曲线关于O y 轴对称。渐近线为$y=\pm x-1$，O（0，0）为具有切线$x=0$和$y=0$的之重奇异点。拐点是$M_{1,2}(\pm 2\sqrt[4]{27},\ 2\sqrt{3})$（图66）。

238. 曲线关于O y 轴对称；$M_{1,2}$（±2，0）为具有切线$\pm x+y-2=0$的第一类尖点。在点M_3（0，2/3）和M_4（0，2）的切线平行O x 轴；$M_{5,6}(\pm\frac{2}{3}\sqrt{5},\ \frac{2}{3})$是拐点（图67）。

239. O x 是对称轴。没有渐近线和奇异点。曲线交O x

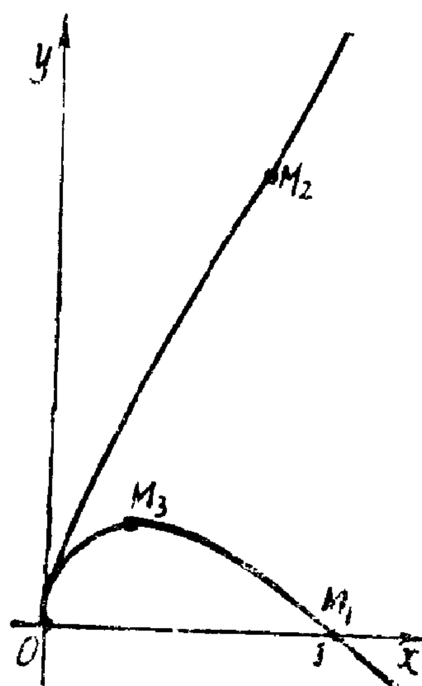

y
M_2
M_3
M_1
0
1
x

图 60

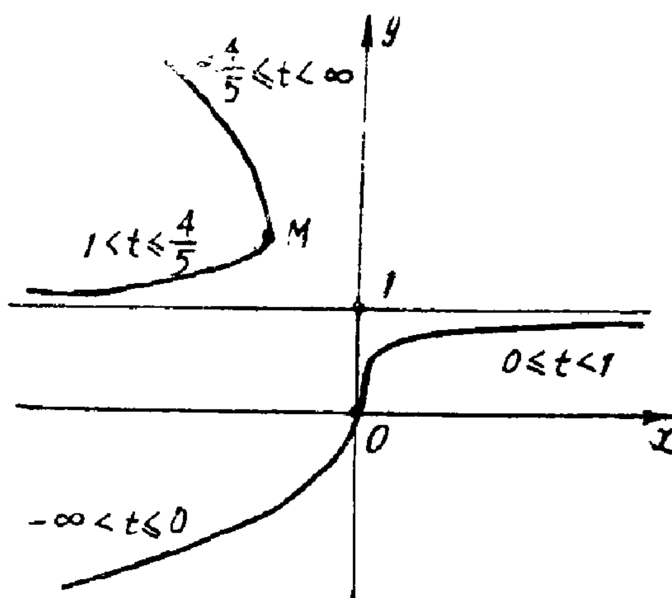

y
$\frac{4}{5} \leqslant t < \infty$
M
$1 < t \leqslant \frac{4}{5}$
1
$0 \leqslant t < 1$
0
x
$-\infty < t \leqslant 0$

图 61

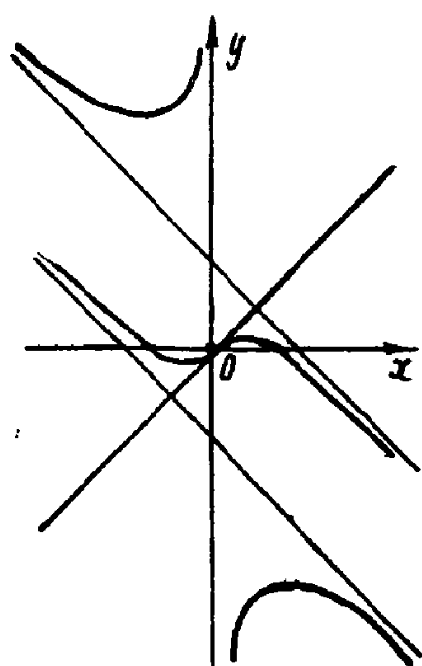


图 62

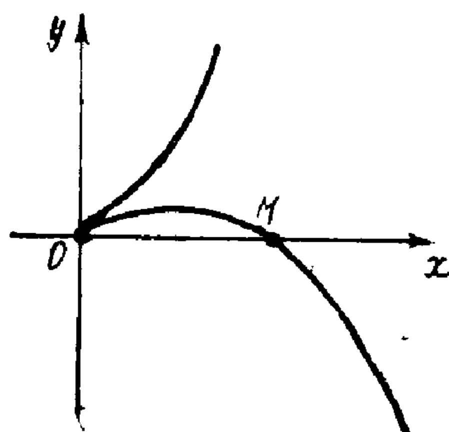


图 63

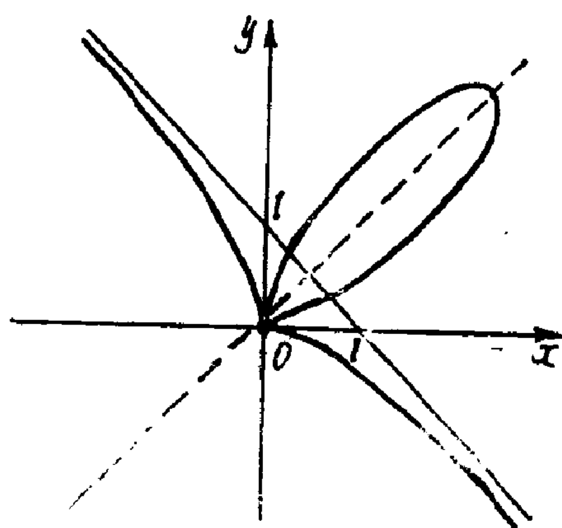


图 64

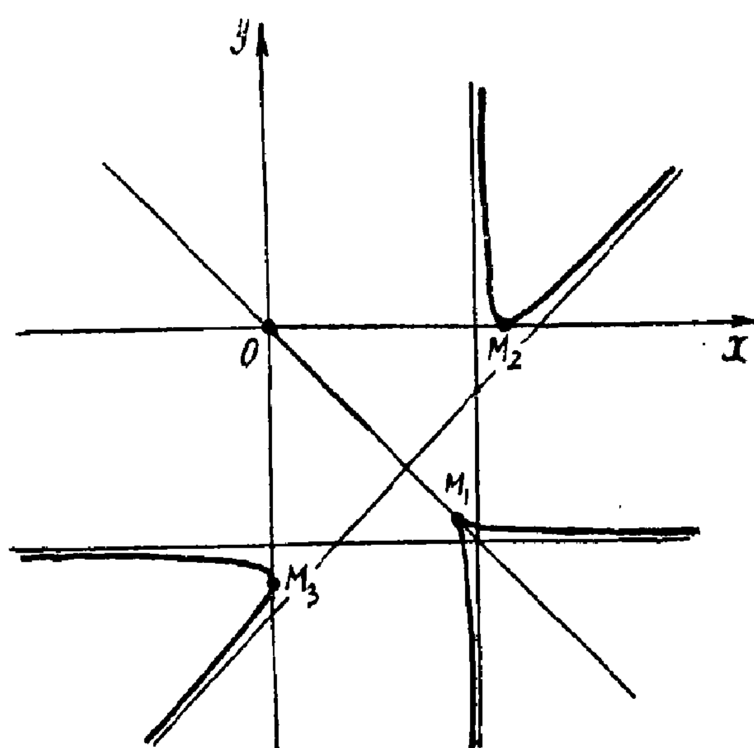


图 65

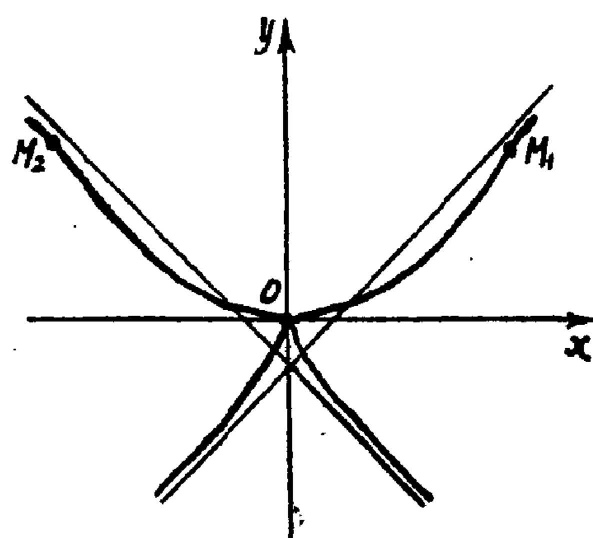


图 66

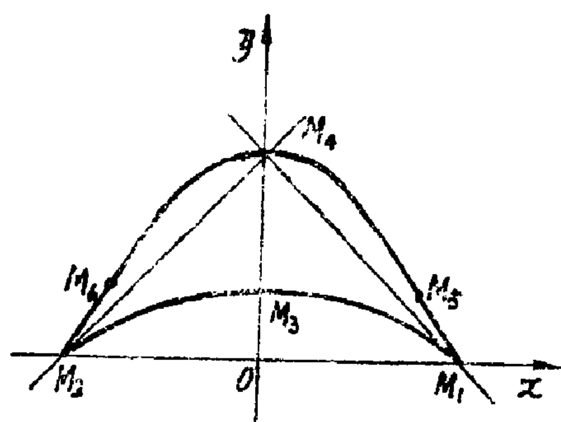


图 67

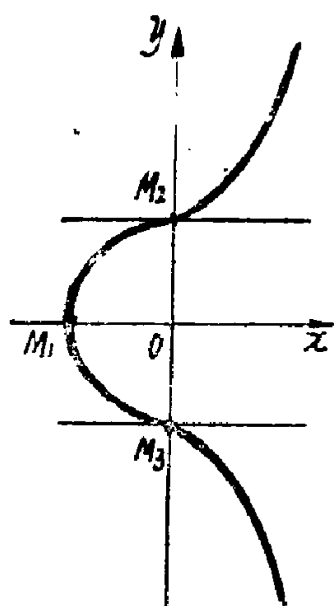


图 68

轴于点$M_1(-1,\ 0)$，交Oy轴于点$M_{2、3}(0,\ \pm 1)$。曲线在点$M_{2、3}$的切线平行Ox轴，在点M_1的切线平行Oy轴。点$M_{2、3}$是拐点（图68）。

240．曲线关于Ox轴对称。渐近线为$x=1$，$y=\pm 2$。曲线在坐标原点与Oy轴相切。在由不等式$0<x\leqslant 1$确定的平面区域内不存在满足已知方程的点（图69）。

241．曲线关于Ox轴对称。渐近线为$x=1$。竖直切切线为$x=0$。曲线仅当x值在区间$0\leqslant x<1$时存在，给出的曲线方程可看作$y^2=\dfrac{x(x^2+1)}{1-x}$（图70）。

242．曲线关于Ox轴对称。渐近线为$x=0$。在点$M_1(-5/2,\ 0)$和$M_2(1/2,\ 0)$切线平行纵轴。有两个拐点（图71）。

343．整条曲线位于中心在坐标原点，边长为2a且边平

行坐标轴的正方形内。曲线关于坐标轴和坐标角的平分线对称（图72）。

244. 曲线类似于双曲线。渐近线为$2y=\pm x$。在$x^2<6$中，除点O（0，0）外，不存在满足已知方程的点。点O是孤立点（图73）。

245. 渐近线为$y=\pm x$。在点O(0，0)和$M_1(\sqrt[3]{2},0)$切线平行Oy轴。有两个拐点M_2和M_3（图74）。

246. 渐近线为$y=\pm x$。在点$M_1\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{32}},\frac{3}{\sqrt[3]{32}}\right)$和$M_2\left(\frac{3}{\sqrt[3]{32}},-\frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right)$切线平行坐标轴（图75）。

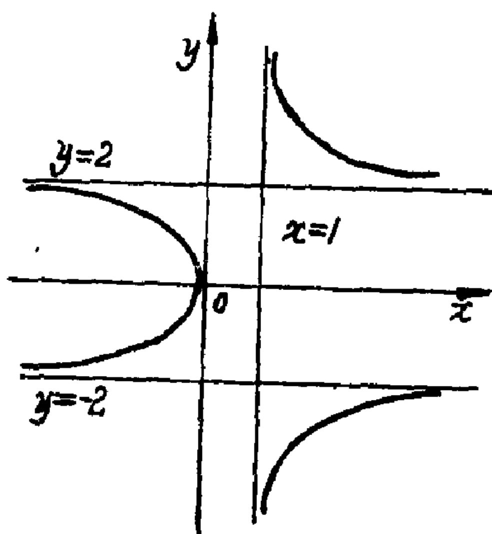


图 69

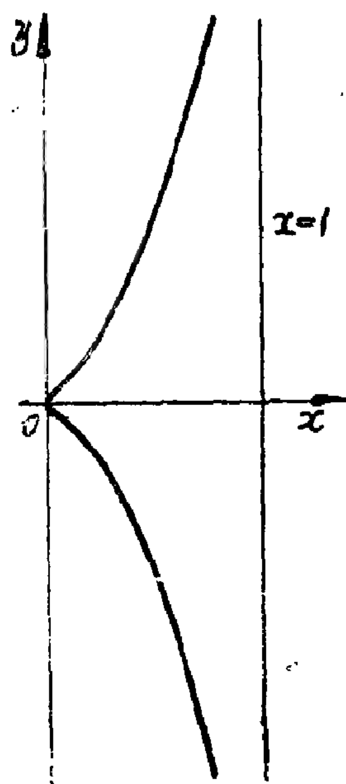


图 70

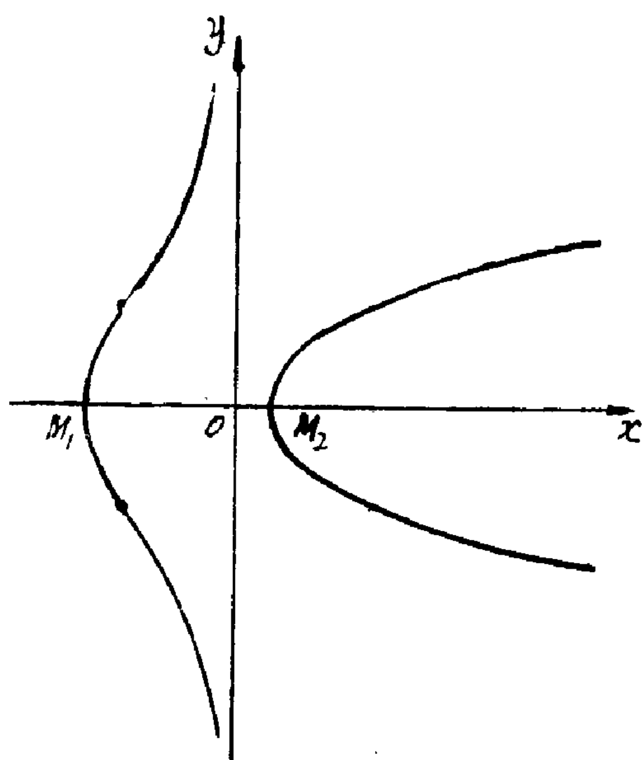


图 71

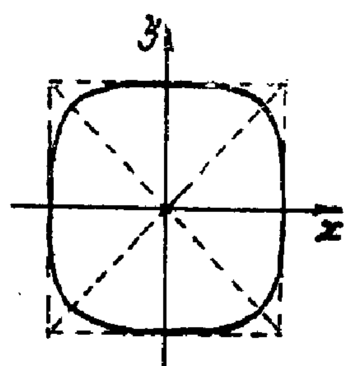


图 72

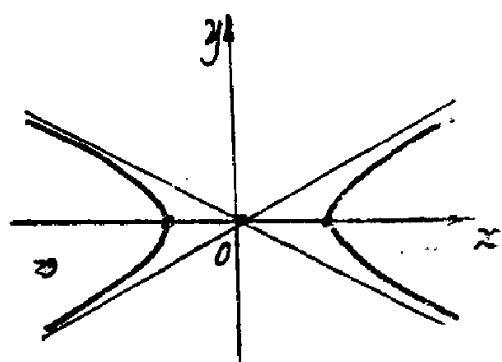


图 73

247. 渐近线为 $x = 0$， $y = 0$， $y = x$； O(0， 0)是具有切线 $y = -x$ 的拐点。在点 M_1、M_2(σ， ($\sqrt{2}+1$)σ)、$M_{3、4}$($-\sigma$， ($\sqrt{2}-1$) σ) 切线平行Ox轴，$\sigma = \pm 1$ (图76)。

248. 渐近线为 $x=0$，$y=0$。在点 $M(0, 1)$ 切线平行 Ox 轴（图77）。

249. 直线 $x=1$ 和孤立点 $O(0, 0)$。

250. 渐近线为 $x=\pm 1$，$y=\pm 1$。$O(0,0)$ 是孤立点（图78）。

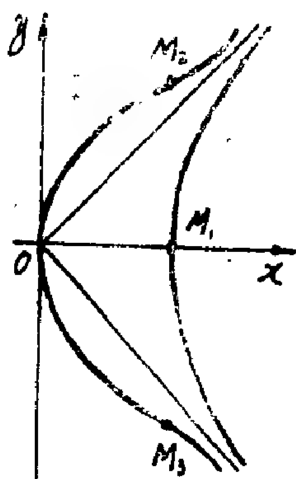


图 74

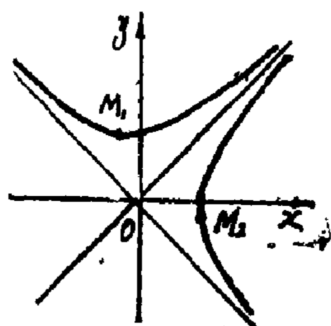


图 75

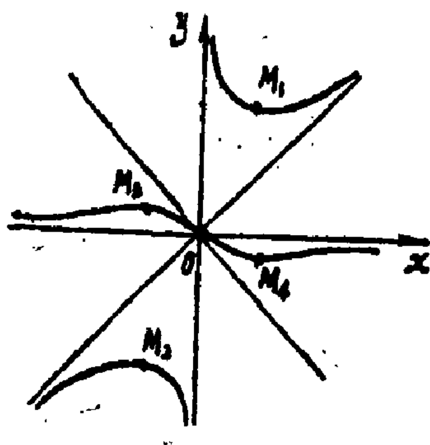


图 76

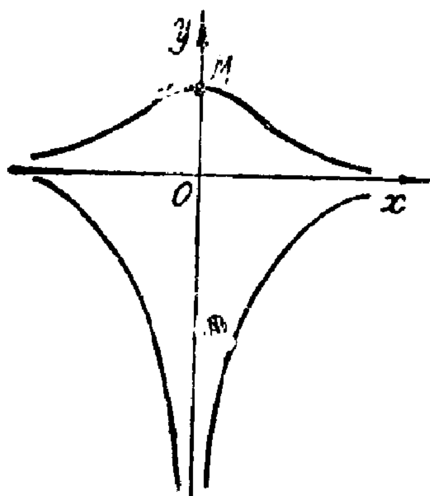


图 77

251. 渐近线为 $y=\pm x$；O（0，0）是孤立点。曲线交Oy轴于点$M_{1、2}$（0，$\pm\sqrt{2}$），在这两点切线平行Ox轴（图79）。

252. 曲线关于Ox轴对称。渐近线为 $y=x+1$，$y=-x-1$，$x=1$；渐近线 $y=\pm(x+1)$ 交曲线于点M_1（-1，0），O（0，0）是孤立点。除O点外，在平面区域 $-1<x\leqslant 1$ 中没有其他点，曲线在M_1的切线平行Oy轴，在横坐标为 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的点M_2和M_3，切线平行Ox轴（图80）。

253. 渐近线为 $y-x\pm\frac{a}{\sqrt{2}}=0$，$y+x\pm\frac{a}{\sqrt{2}}=0$。坐标原点是孤立点，在点$M_{1、2}$（0，$\pm a$）切线平行Ox轴，在点$M_{3、4}$（$\pm a$，0）切线平行Oy轴（图81）。

254. 曲线关于Ox轴对称。点M_0（2，0）是孤立点。在点$M_{1、2}$（-2，$\pm\sqrt{2}$）切线平行Ox轴，有两个拐点$M_{3、4}$和一渐近线 $x=0$（图82）。

255. 渐近线为 $3x+4=0$，$3x\pm3\sqrt{3}y-8=0$ O（0，0）是孤立点。曲线交Ox轴于点M（4，0），在这点的切线是 $x=4$（图83）。

256. 整条曲线位于中心在坐标原点，边长为$\sqrt{2+\sqrt{8}}$且边平行坐标轴的正方形内。曲线关于坐标轴和坐标角的平分线对称。坐标原点是孤立点。在点$M_{1、2}$（0，± 1），M_{3-6}（$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}$）切线平行Ox轴，在点

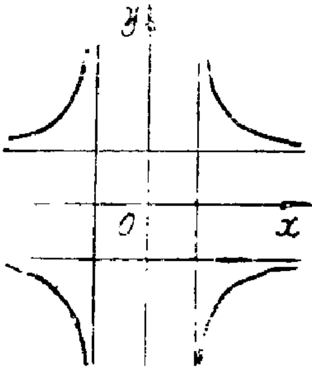


图 78

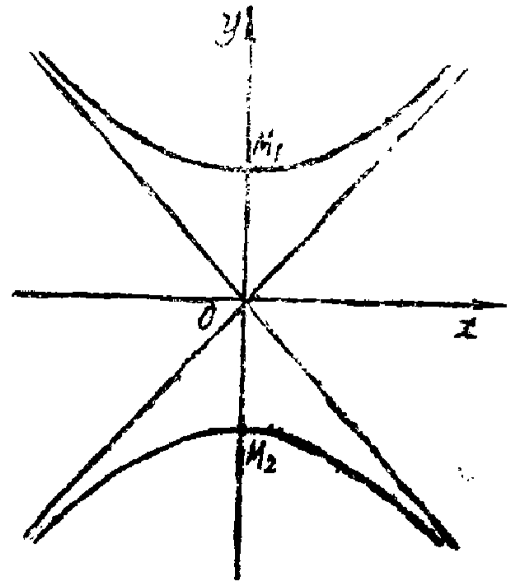


图 79

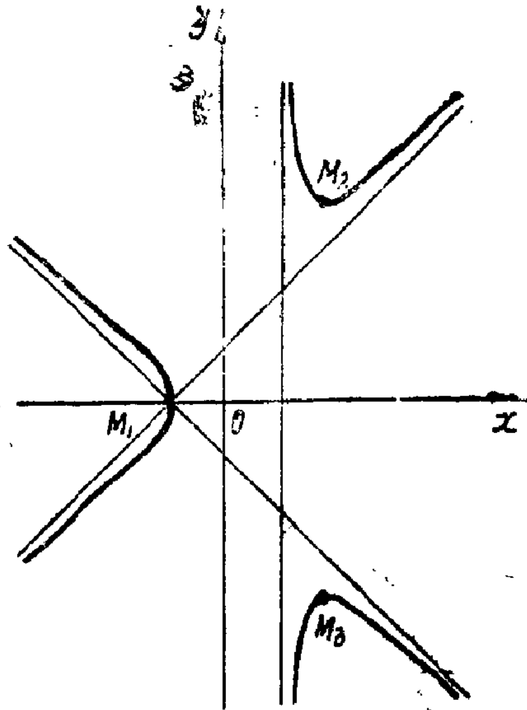


图 80

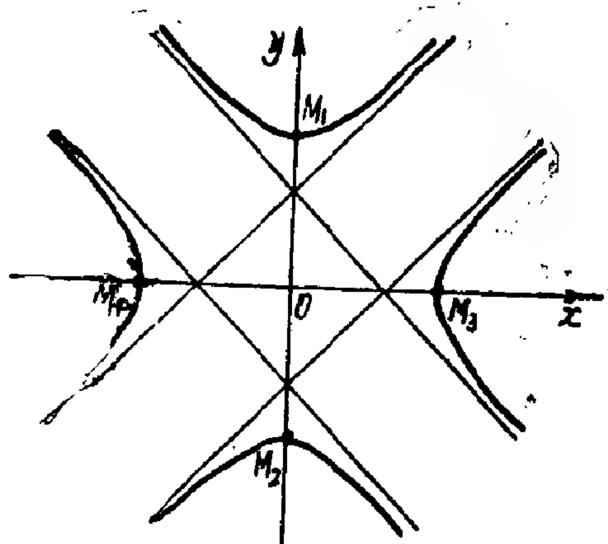


图 81

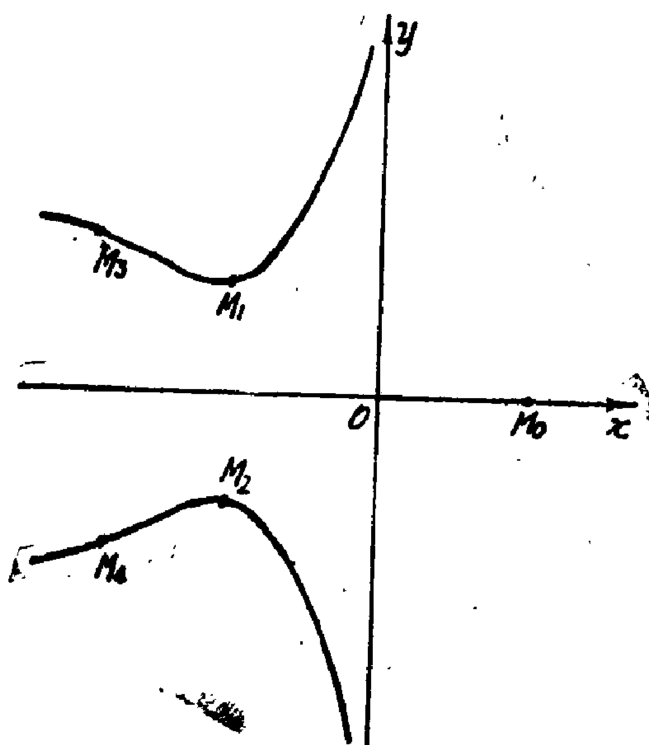


图 82

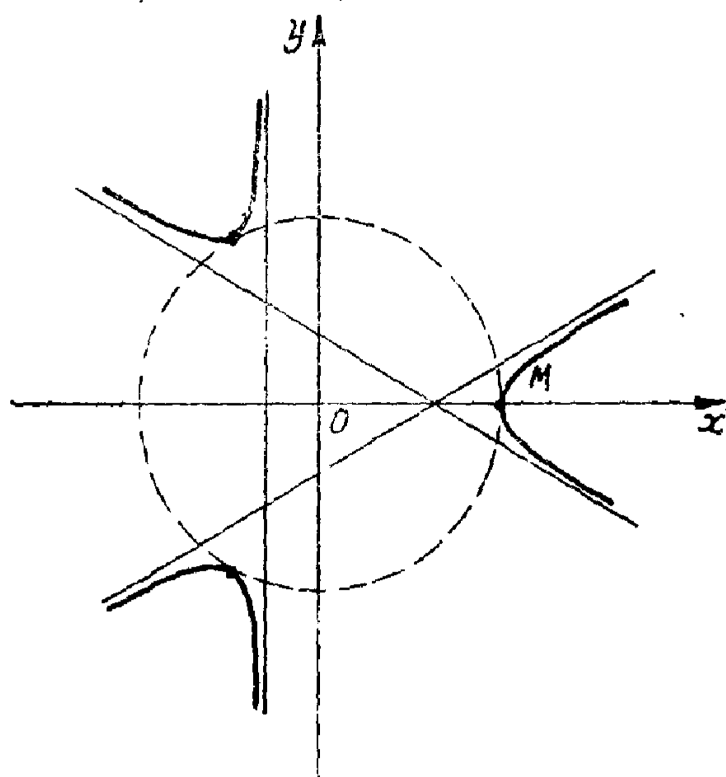


图 83

$M_{7、8}(\pm 1, 0)$，$M_{9-12}(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ 切线平行Oy轴（图84）。

257. 曲线关于Ox轴对称，整条曲线位于平面区域$-1\leqslant x<1$。渐近线为$x=1$，坐标原点是具有切线斜率为$k=\pm 1$的自交点。在点$M_1(-1, 0)$切线平行Oy轴，在横坐标$x=\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$的点$M_{2、3}$切线平行Ox轴（图85）。

258. 曲线关于坐标轴对称。与坐标轴的交点是$O(0, 0)$，$M_{1、2}(0, \pm 1)$。在点$M_{1、2}$切线平行Ox轴，在

点M_{3-6}（$\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$，$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$）切线平行Oy轴，O(0，0）是具有切线$y=\pm x$的自交点（图86）。

259. 曲线关于Ox轴对称。M（1，0）是具有切线$y=\pm(x-1)$的自交点，渐近线为$x=0$（图87）。

260. 曲线关于坐标角的平分线对称。O(0，0）是具有$x=0$，$y=0$的自交点，与坐标轴没有其它交点。在两点$M_1(\sqrt[8]{3/16}, \sqrt[8]{27/16})$，$M_2(-\sqrt[8]{3/16}, -\sqrt[8]{27/16})$切线平行Ox轴，在另两点$M_3(\sqrt[8]{27/16}, \sqrt[8]{3/16})$，$M_4(-\sqrt[8]{27/16}, -\sqrt[8]{3/16})$切线平行Oy轴。没有渐近线（图88）。

261. 曲线关于坐标轴对称，并位于由直线$x=\pm 1$，$y=\pm 1/2$围成的长方形内；O（0，0）是具有切线$y=\pm x$的自交点。在点M_{3-6}（$\pm\sqrt{2}/2$，$\pm 1/2$）切线平行Ox轴，在点$M_{1,2}$（± 1，0）切线平行Oy轴（图89）

262. 曲线关于Ox轴对称。渐近线为$y=\pm 1$，$x=-1$，$x=-2$；O(0，0）是具有切线$y\sqrt{2}=\pm x$的自交点（图90）。

263. 在两点$M_{2,3}$（$1/3$，$\pm 2/3\sqrt{3}$）切线平行Ox轴；点M_1（1，0）是具有切线$y=\pm(x-1)$的自交点。在点O（0，0）的切线平行Oy轴（图91）。

264. 曲线关于坐标角的平分线对称；O（0，0）是具有切线$x=0$，$y=0$的自交点。在点$M_{1,2}(\sigma\sqrt[4]{3}, \sigma\sqrt[4]{27})$切线平行Ox轴，在点$M_{3,4}(\sigma\sqrt[4]{27}, \sigma\sqrt[4]{3})$切线平行Oy轴，其中$4\sigma=\pm 1$（图92）。

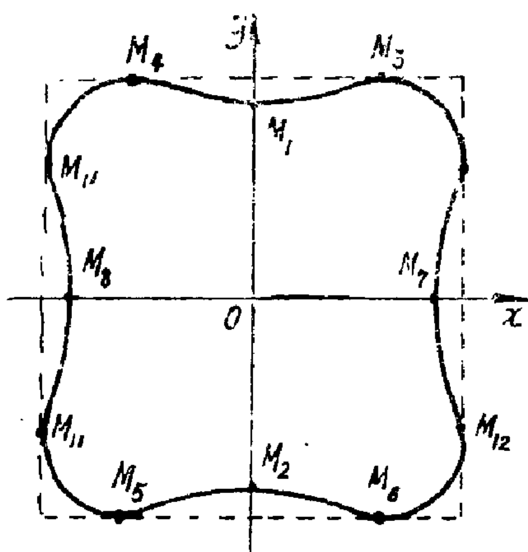


图 84

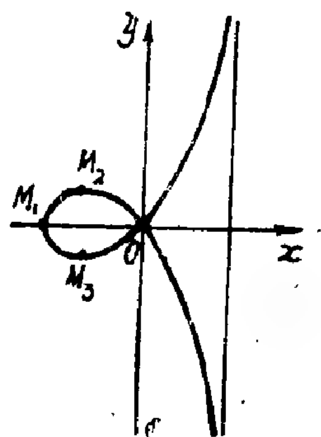


图 85

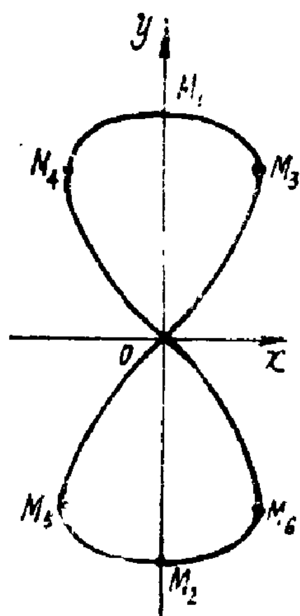


图 86

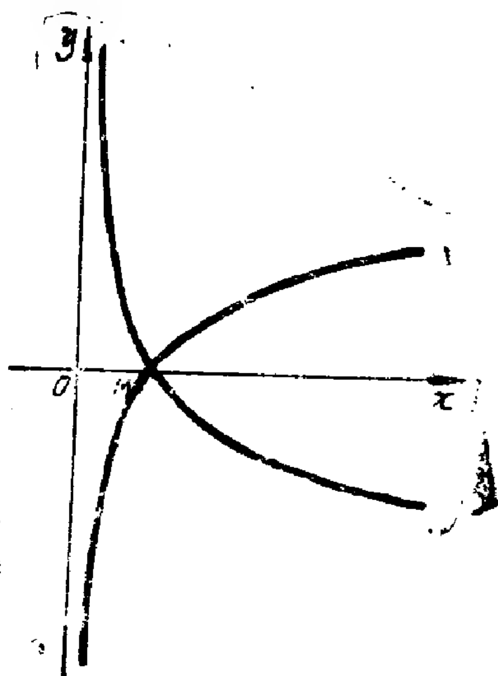


图 87

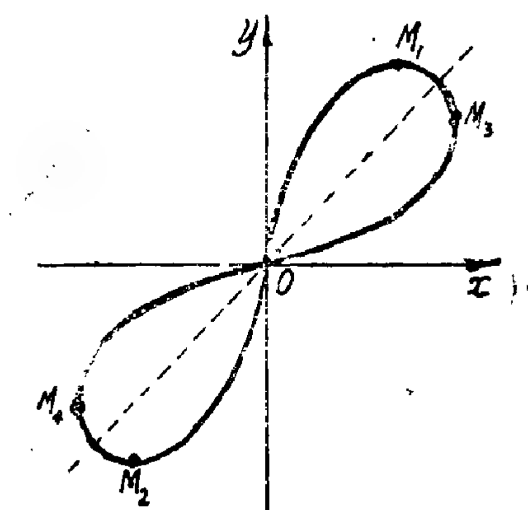


图 88

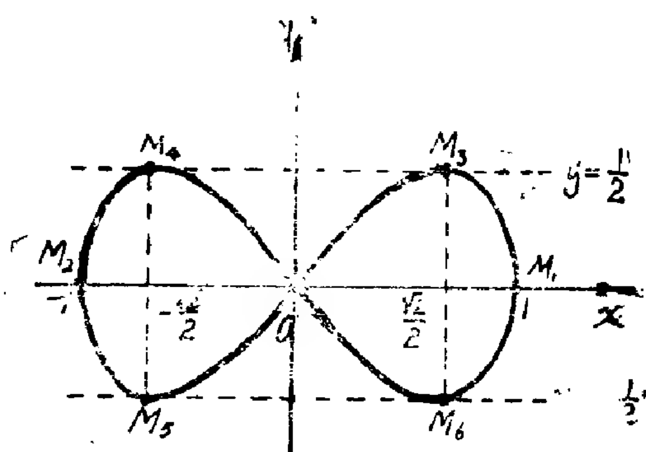


图 89

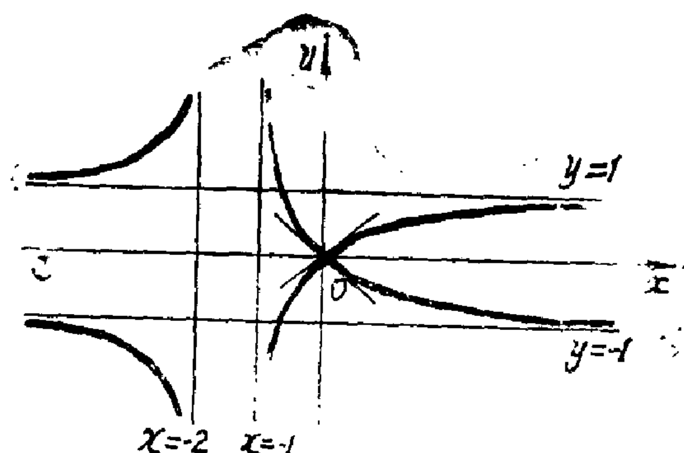


图 90

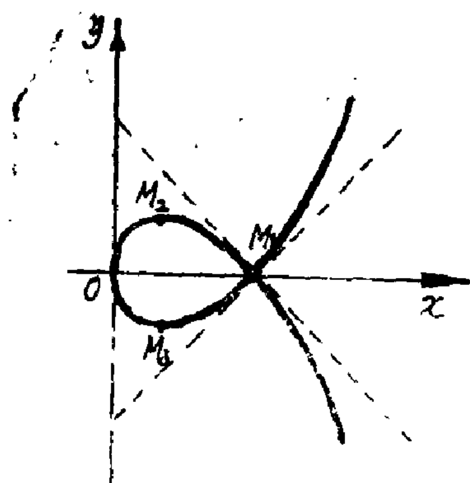


图 91

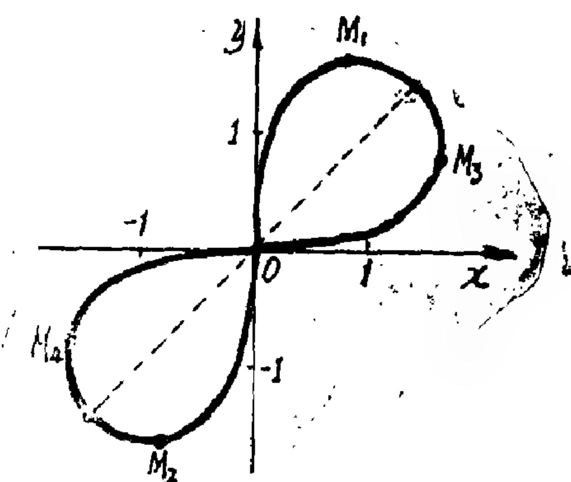


图 92

265. 渐近线 $y=-x+\frac{1}{3}$ 交曲线于点 M_1（$1/9$，$2/9$）；O（0，0）是具有切线 $x=0$ 的第一类尖点。在点 M_2（1，0）切线平行 O y 轴，在点 M_3（$2/3$，$\sqrt[3]{4}/3$）切线平行 O x 轴（图93）。

266. 没有渐近线。O（0，0）是具有切线 $y=x$ 的第

一类尖点。曲线交Ox轴于点M_1（27，0），在点M_2(12,4)切线平行Ox轴（图94）。

267．曲线关于Ox轴对称。O（0，0）是具有切线

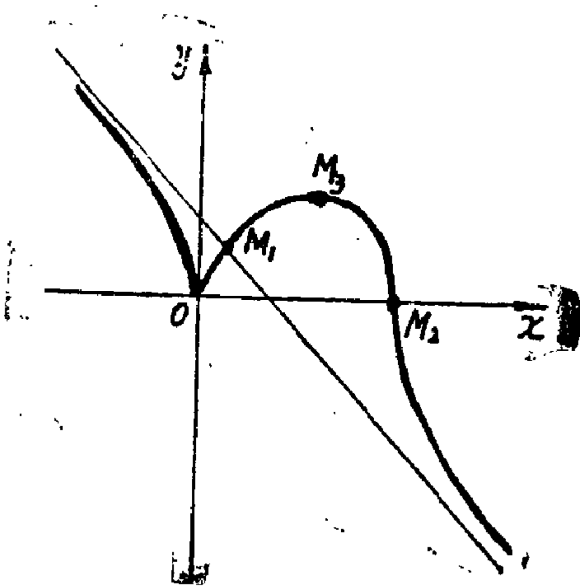


图 93

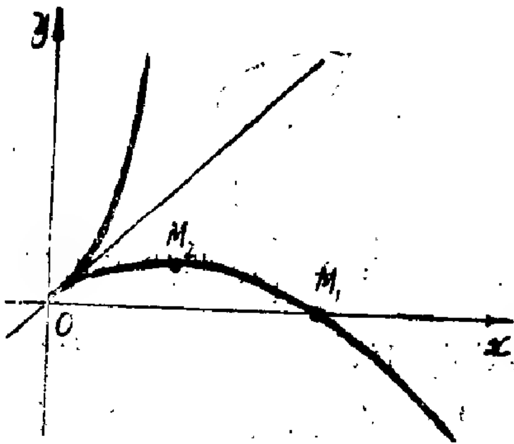


图 94

$y=0$的第一类尖点。渐近线为$x=a$，$x\pm y=-a/2$。在平面区域$0<x\leqslant a$内没有满足曲线方程的点（图95）。

268. O（0，0）是具有切线$y=0$的第二类尖点；$M_1\left(\frac{64}{225}, \frac{28672}{759375}\right)$是拐点。在点$M_2\left(\frac{16}{25}, \frac{256}{3125}\right)$切线平行Ox轴，曲线交Ox轴于点$M_3$（1，0）（图96）。

269. 曲线关于Oy轴对称。O（0，0）是三条弧线经过它的奇异点。在点O的切线是$y=0$，$x\pm y=0$。没有拐点和渐近线。在点$M_{1、2}(\pm\sqrt{2}/4, 1/4)$，$M_{3、4}(\pm\sqrt{6}/9, 2/9)$切线平行坐标轴（图97）。

270. 曲线关于Oy轴对称。O（0，0）是具有切线$y=0$的自切点。在点$M_{1、2}$（± 6，12）切线平行Ox轴，在点$M_{3、4}(\pm 6\sqrt{2}, 8)$切线平行Oy轴；有两个拐点$M_{5、6}$（图98）。

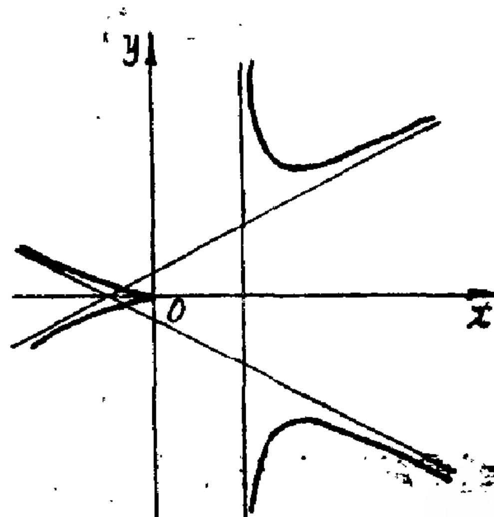


图 95

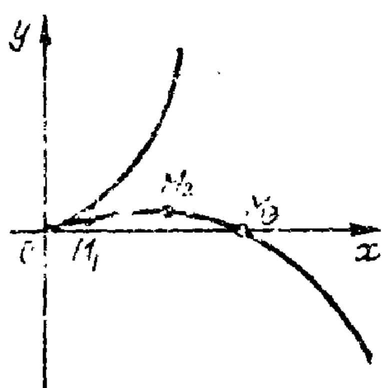


图 96

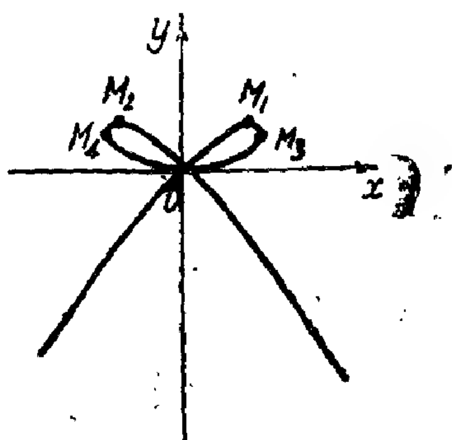


图 97

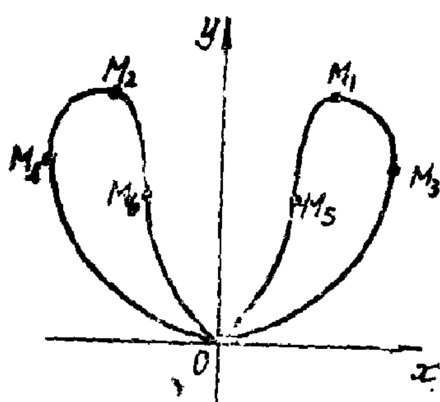


图 98

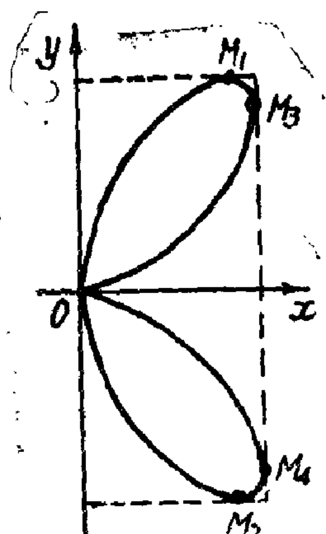


图 99

271. 曲线关于O x 轴对称。O（0，0）是具有切线 $x\Rightarrow 0$，$y=0$ 的三重奇异点。在点 $M_{1、2}(\sqrt{12},\ \pm\sqrt{\sqrt[3]{12}})$ 切线平行O x 轴，在点 $M_{3、4}$（4，±4）切线平行O y 轴（图99）。

272. 曲线关于坐标轴对称。O（0，0）是具有切线

$y=0$的自切点。曲线交Ox轴于点$M_{1,2}$（±1，0）。在点$M_{1,2}$切线平行Oy轴，在点M_{3-6}（$\pm\sqrt{6}/3$，$\pm2\sqrt{3}/9$）切线平行Ox轴；M_{7-10}是拐点（图100）。

273．渐近线$y=\pm x$；O（0，0）是具有切线$x=0$，$y=0$的自交点。有五个拐点（图101）。

274．整条曲线位于中心在坐标原点，边长等于4且边平行坐标轴的正方形内。曲线关于坐标轴和坐标角平分线对称。O（0，0）是具有切线$x=0$，$y=0$的四重奇异点，在点M_{1-4}（$\pm\sqrt{2}$，±2）切线平行Ox轴，在点M_{5-8}（±2，$\pm\sqrt{2}$）切线平行Oy轴（图102）。

275．因为函数tg（$\varphi/2$）是周期为2π的周期函数。因此考察在范围$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$的$\varphi$值就足够了。因为点（$2\pi-\varphi$，$-r$）与点（$\pi-\varphi$，$r$）是相同的，而点（$\varphi$，$r$）和（$\pi-\varphi$，$r$）关于直线$\varphi=\pi/2$对称，因此这条直线是曲线的对称轴。当极角在范围$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$内变化时，$r=\text{tg}(\varphi/2)$将取正值，因此在取上面指出的$\varphi$值时，曲线将位于极轴的上方。由于关于直线$\varphi=\pi/2$对称，曲线将落在极轴的上方。曲线具有自交点（$\pi/2$，1）。有平行极轴且距离极轴为两个单位长的渐近线。根据公式：$\text{tg}\mu=r/r'$（参看150题）得到

$$\text{tg}\mu=\sin\varphi。\quad(*)$$

因此曲线仅在$\varphi=0$时与切点径矢相切。在自交点M_0切线与对称轴交成45°角。因为若$\mu+\varphi=k\pi$，曲线的切线平行极轴，故在这些点上有$\text{tg}\mu=-\text{tg}\varphi$，将这与等式（*）比较，得$\varphi=k\pi$；因此极轴为所求的切线。因为若$\mu+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，

故有$\text{tg}\,\mu=\text{ctg}\,\varphi$，而由于（*）可得$\text{ctg}\,\varphi=\sin\varphi$，故有$\cos\varphi=(\sqrt{5}-1)/2$，$\text{tg}(\varphi/2)\approx 1/2$。根据公式$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$引入笛卡尔坐标，得两点$M_1$和$M_2$，在这两点切线垂直极轴：$x_1\approx 0.3$，$y_1\approx 0.4$；$x_2\approx -0.3$，$y_2\approx -0.4$（图103）。

276. 图104，在极点螺线有拐点。随着远离极点螺圈间

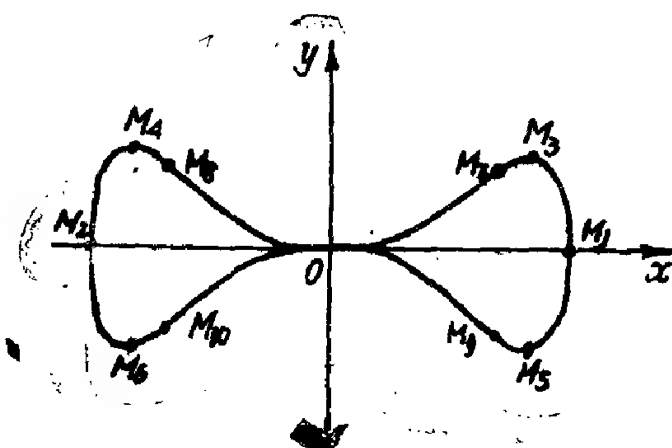


图 100

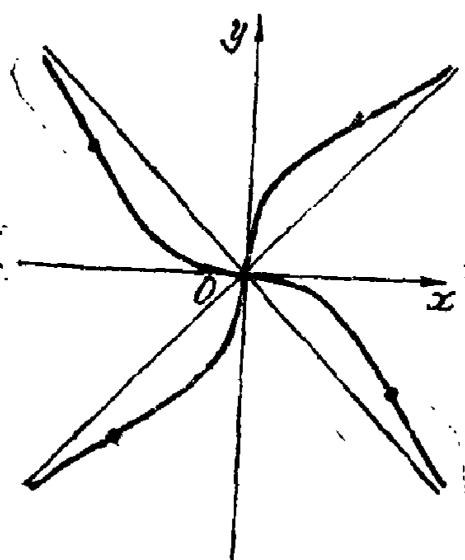


图 101

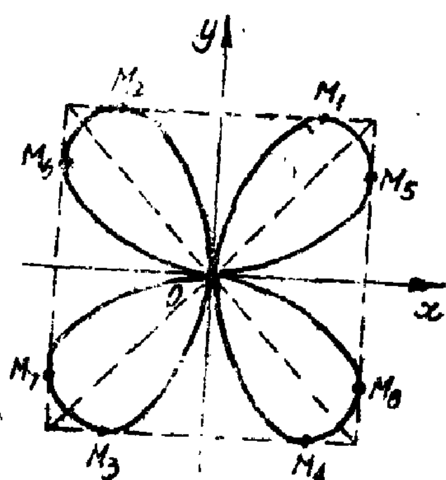


图102

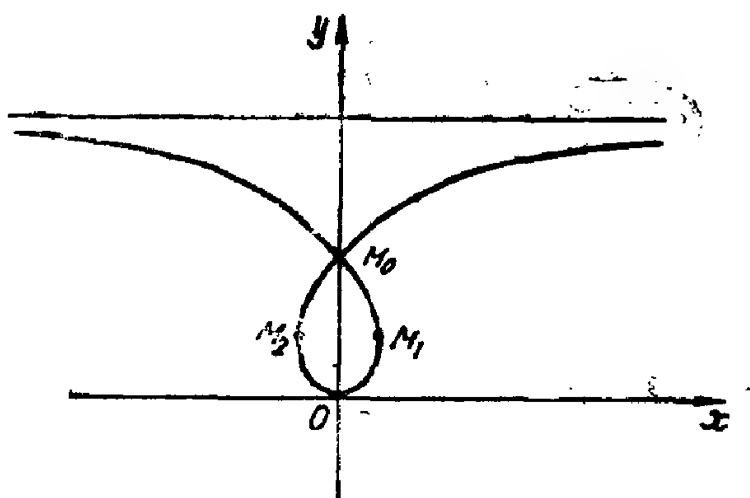


图 103

的距离无限减小。

277. 如果 r 、φ 是广义极坐标（即 r 能取任何符号值）那么方程 $r^2\varphi = a^2$ 给出两条关于极点对称的曲线，其中每一条都无限逼近极点和逐渐逼近极轴（图105）。

278. 图106。极点是第一类尖点，在此点极轴是切线。

279. 设 $a > 0$，在 $\varphi \to 0$ 时曲线渐渐靠近一平行极轴且距离极轴为 1 的直线。当 φ 无限增大，曲线绕极点转无数圈而逐渐逼近圆 $r = a$（图107）。在 $a = 0$ 时得到双曲螺线（参考169题，图41）。

280. 曲线关于笛卡尔坐标系的轴对称，它的Ox轴与极轴重合。曲线交Ox轴于点 $M_{1,2}$（$\pm a$，0），O(0，0)，且点O是具有切线 $y = 0$ 的自切点，曲线具有两个自交点：M_3（0，$a/\sqrt{2}$）和 M_4（0，$-a/\sqrt{2}$）（图108）。

281. 图109。

282. 曲线族由与O y 轴相切于原点，并与直线 $y = 1/2$

图 104

图 105

图 106

图 107

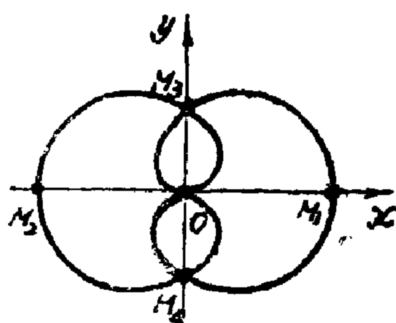


图 108

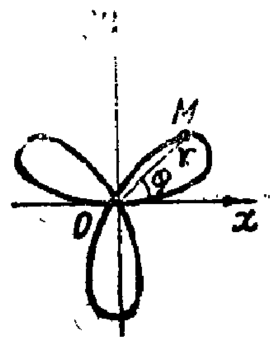


图 109

和 $y=-1/2$ 相切的椭圆组成，且 Ox 轴也包含在族中。（图110）。

283. 在 $C=0$ 时是一对直线 $x=0$，$x-2y=0$。在 $C\neq 0$ 时是相似的双曲线，它们的渐近线平行上面的两条直线，双曲线的中心 $O^*(C, C)$ 布满直线 $x-y=0$，双曲线的一支在坐标原点与 Ox 相切（图111）。

284. 1）共焦点的椭圆族；2）共焦点的双曲线族（图112）。

287. 圆心在束心的同心圆（图113）。

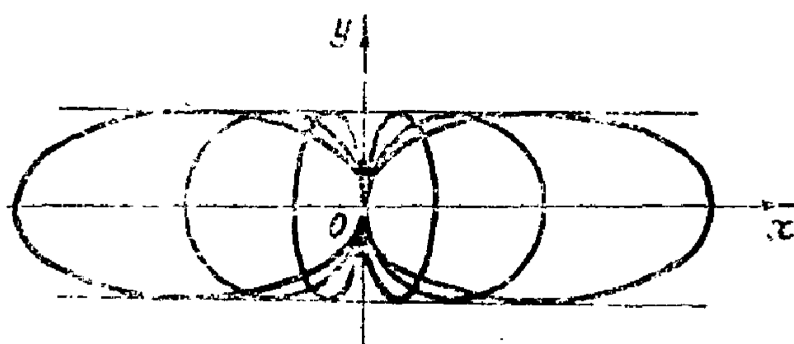


图 110

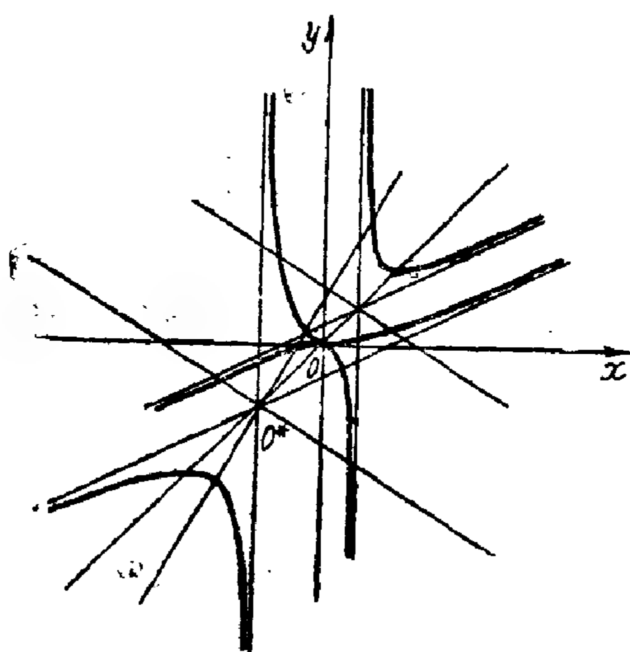


图 111

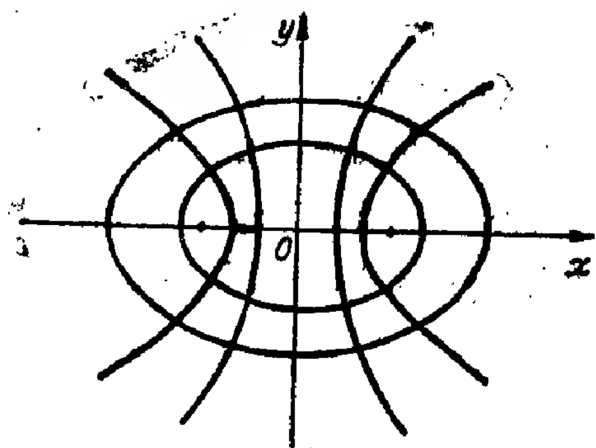


图 112

288. $(x-C)^2+y^2=C^2$（图114）。

289. $x^2+\frac{y^2}{2}=C$（图115）。

290. 相交圆族。它的中心曲线沿着已知圆族的公共弦。

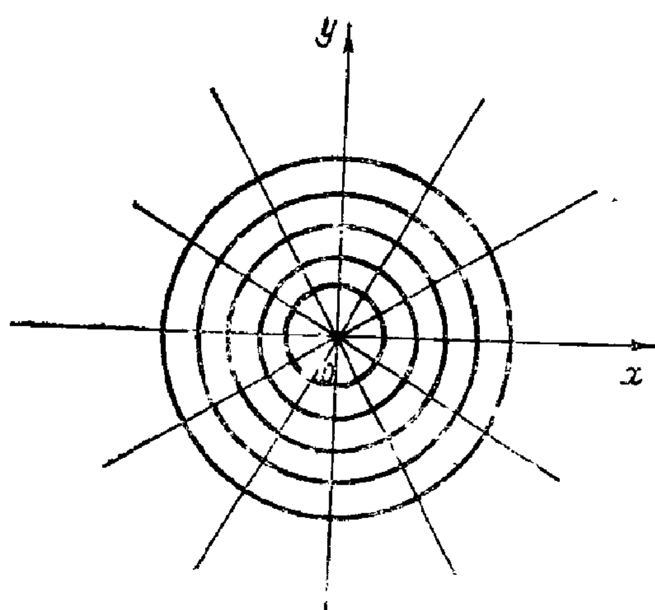


图 113

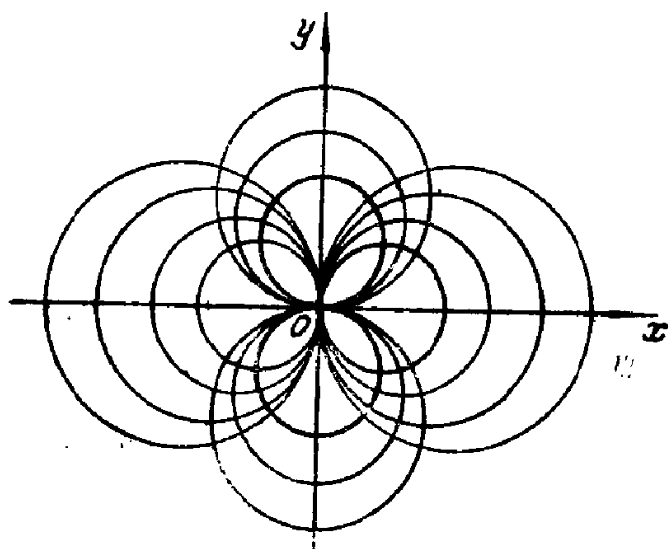


图 114

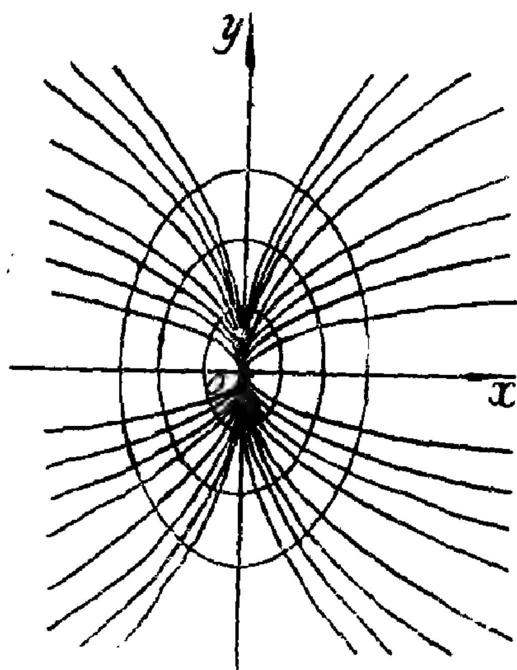


图 115

取公共弦的中点为坐标原点，并沿已知弦为Ox轴方向，得到方程 $(x-C)^2+y^2=C^2-a^2$（图116）。

291. $y=\pm a$（图117）。

292. $x=0$，$y=0$（图118）。

293. $x^2+y^2=p^2$（图119）。

294. $y=0$（图120）。

295. 判别曲线 $y=0$，由族中的曲线的奇异点组成(图121)。

296. 判别曲线 $y=0$，由族中的曲线的奇异点组成(图122)。

297. 判别曲线分解为一对直线 $x=y$ 和 $x-y-\frac{2}{9}=0$。第一条由曲线的奇异点组成，第二条是包络（图123）。

298. 圆$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$（图124）。

299. 抛物线$y^2+4a(x-a)=0$（图125）。

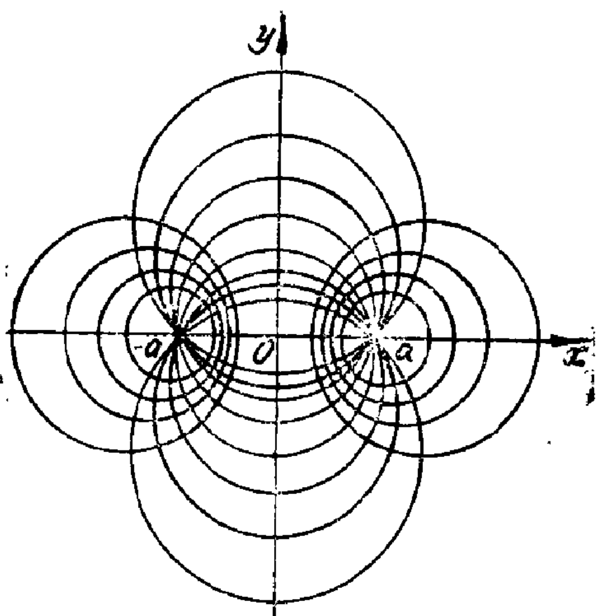


图 116

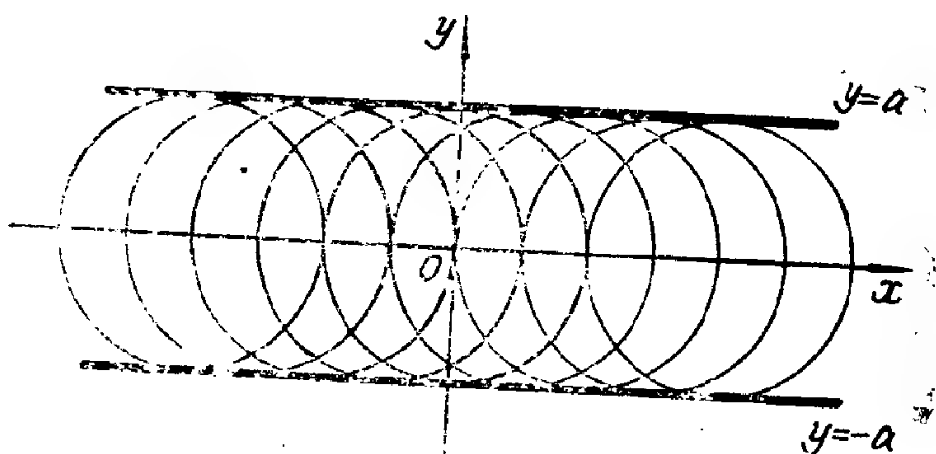


图 117

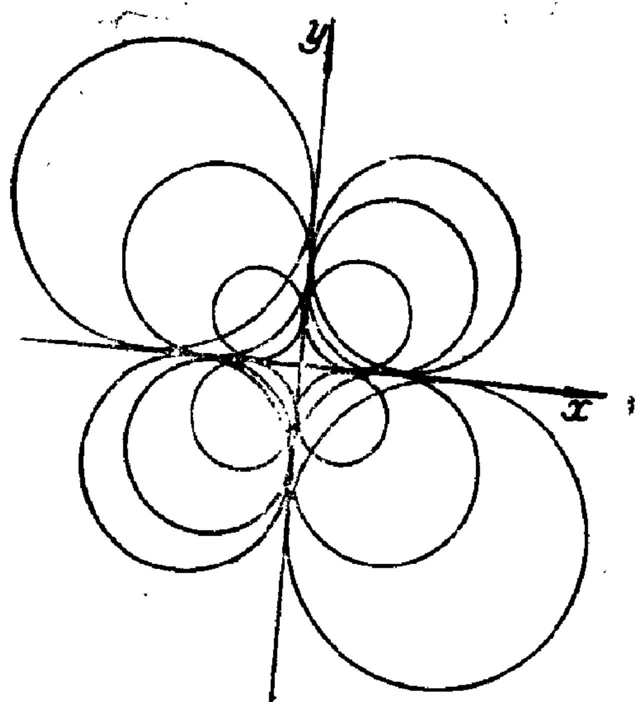


图 118

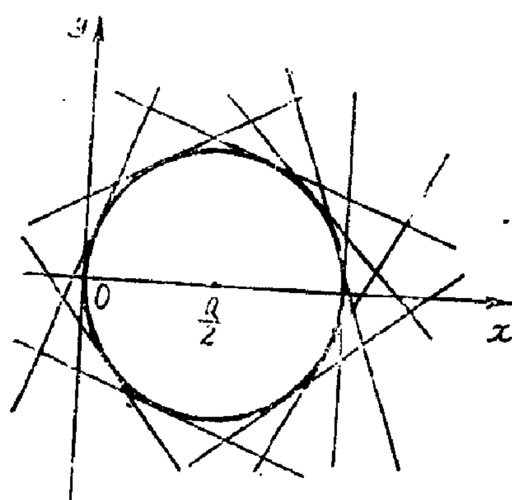


图 119

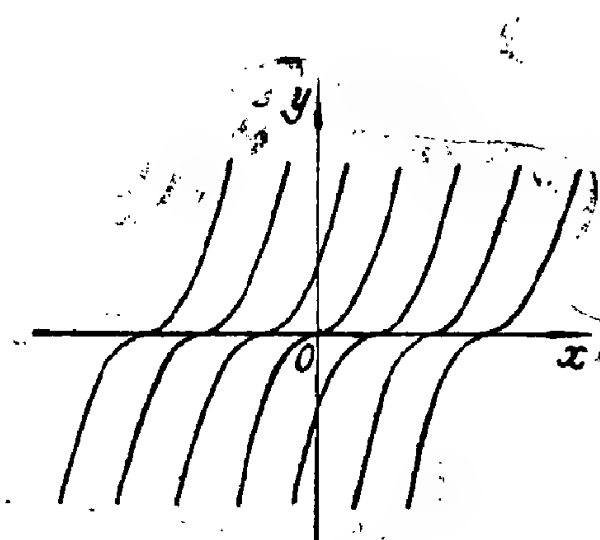


图 120

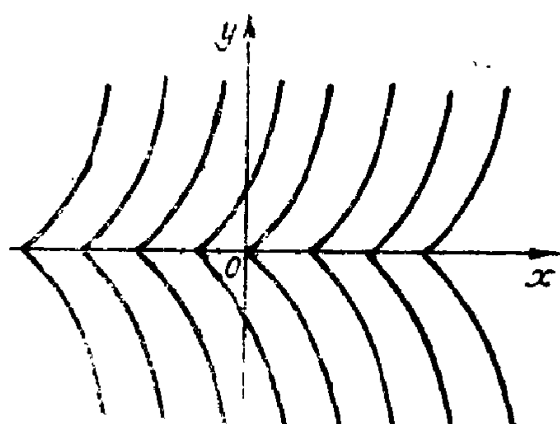


图 121

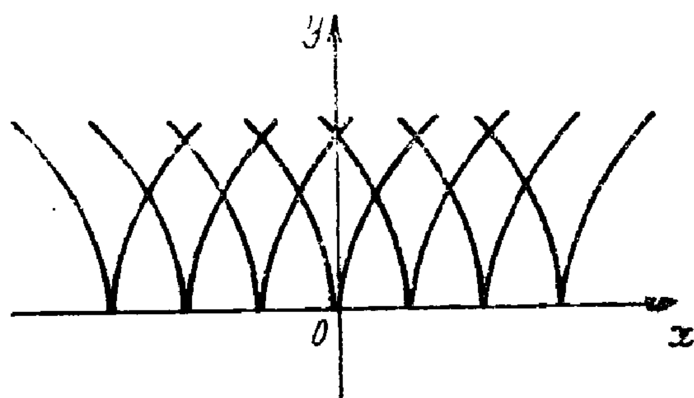


图 122

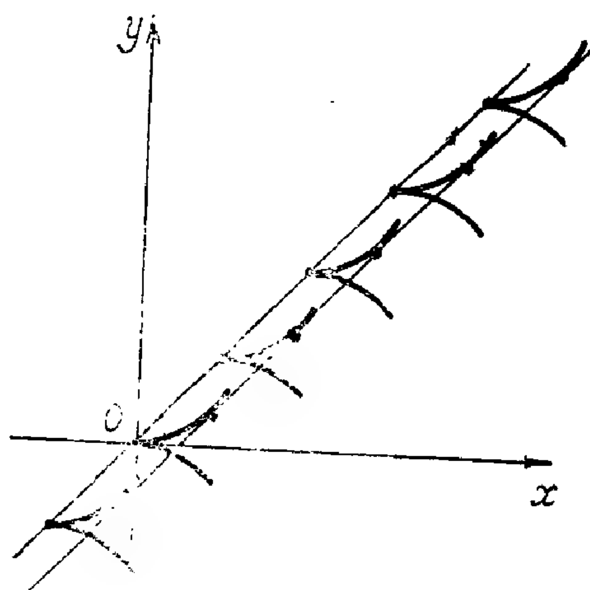


图 123

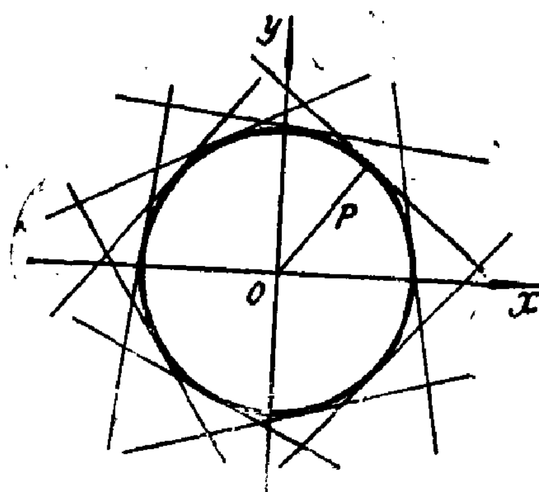


图 124

300. 双曲线 $xy=\pm S/2$ （图126）。

301. $(A^2+B^2)R^2=C^2$。

302. 星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ （图127）。

303. 1）抛物线 $y^2=4ax$ （图128）。

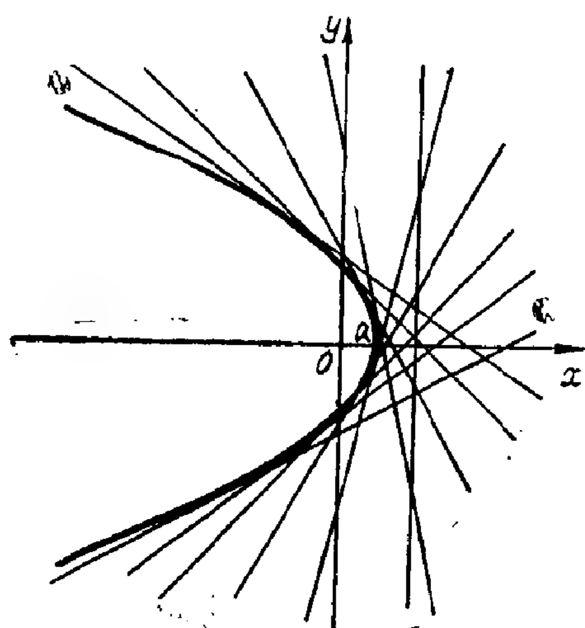


图 125

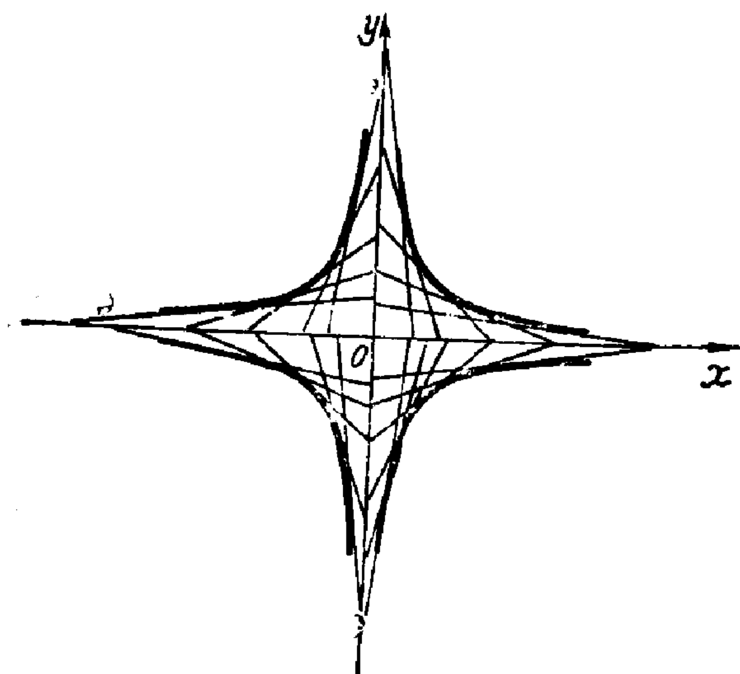


图 126

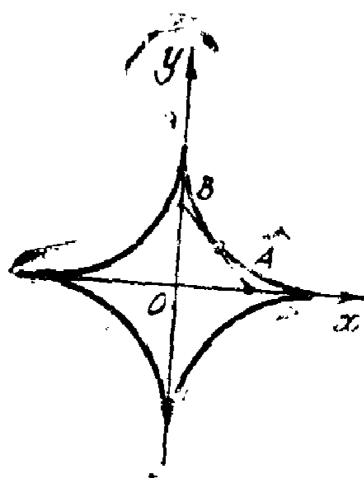


图 127

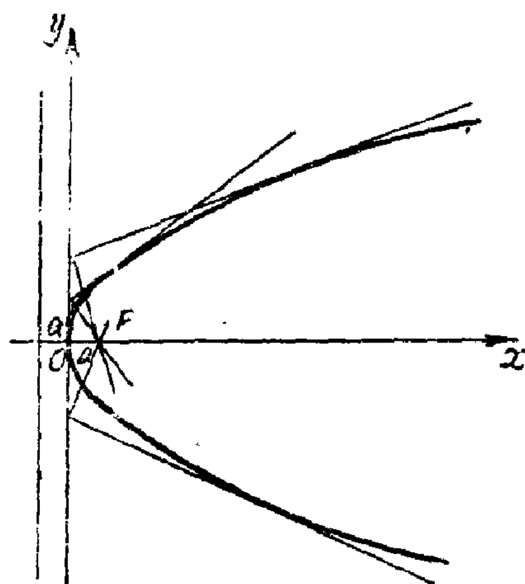


图 128

提示：取定直线为O y 轴，而使O x 轴过点F。设F（a，0），记过F的直线束方程为$y = C(x - a)$，我们得到，题中所给的族的直线过具有坐标为（0，$-Ca$）的O y 轴的点，其斜率为$-1/C$。

2）如果F（a，0），而圆方程为$x^2 + y^2 = r^2$，则在$r > a$时得到椭圆$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - a^2} = 1$，在$r < a$时得到双曲线$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{a^2 - r^2} = 1$，在$r = a$时没有包络(图129)。

304．摆线（图130）。

305．$x^2 + y^2 = (R - r)^2$，$x^2 + y^2 = (R + r)^2$（图131—133）

306．在已知抛物线的顶点处的切线。

307．包络由圆$(x - \frac{3p}{4})^2 + y^2 = (\frac{3p}{4})^2$和抛物线

的准线 $x=-p/2$ 组成。

308. 将椭圆方程写为参数式：$x=a\cos\varphi$，$y=b\sin\varphi$，$0\leqslant\varphi<2\pi$。

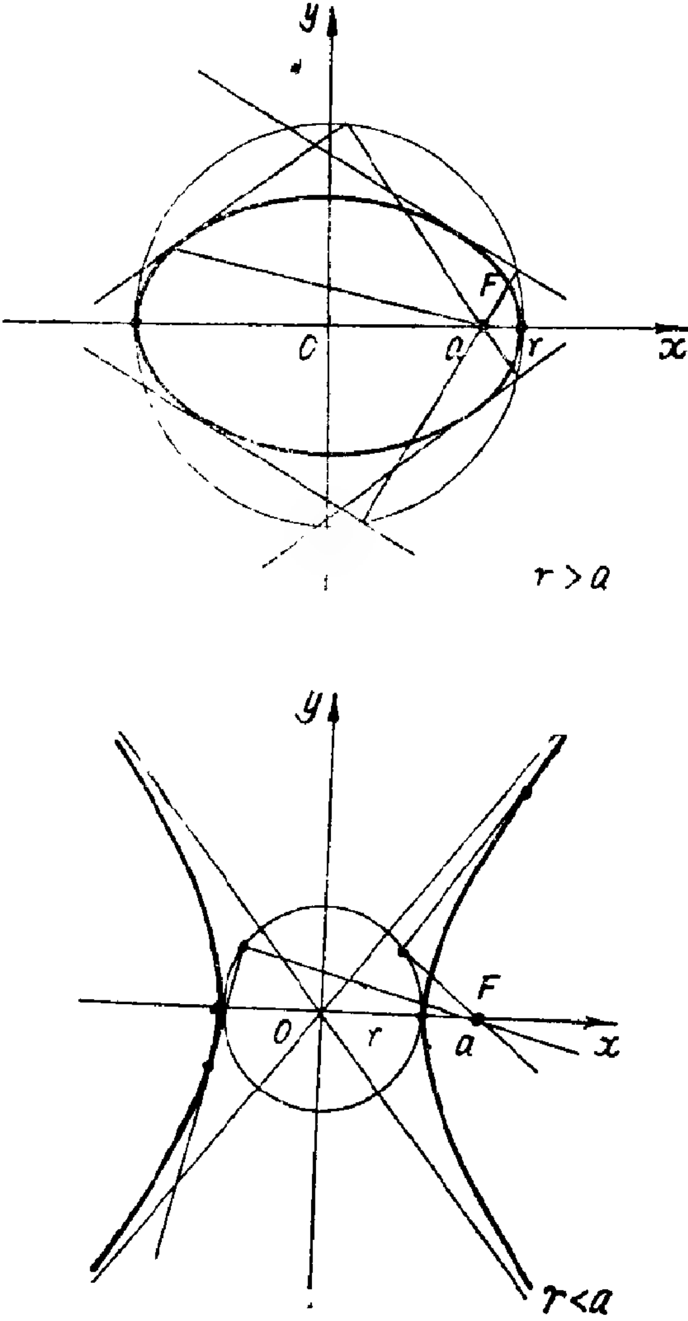


图 129

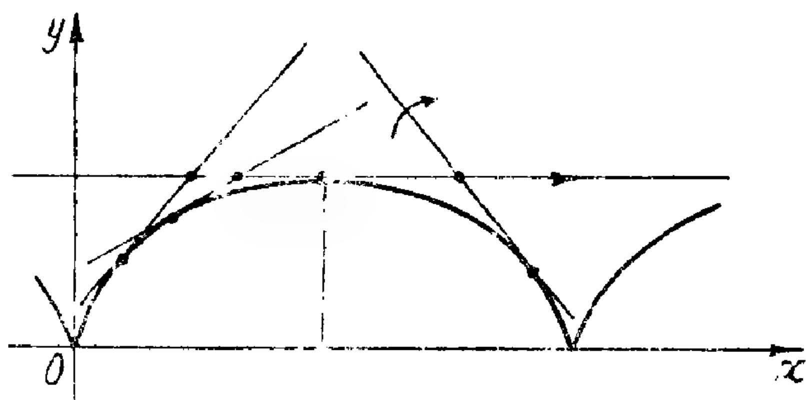


图 130

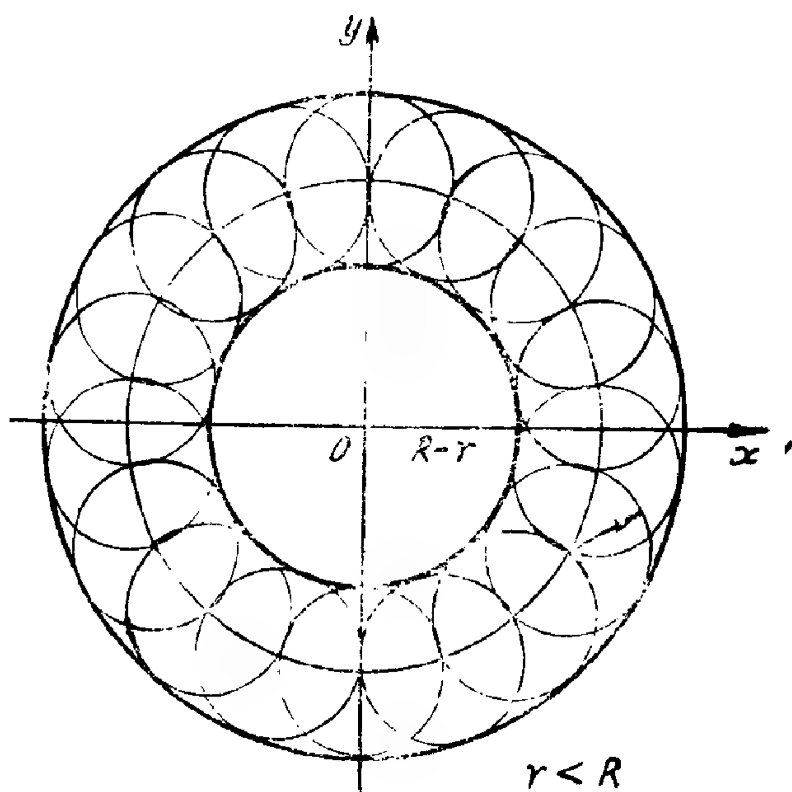


图 131

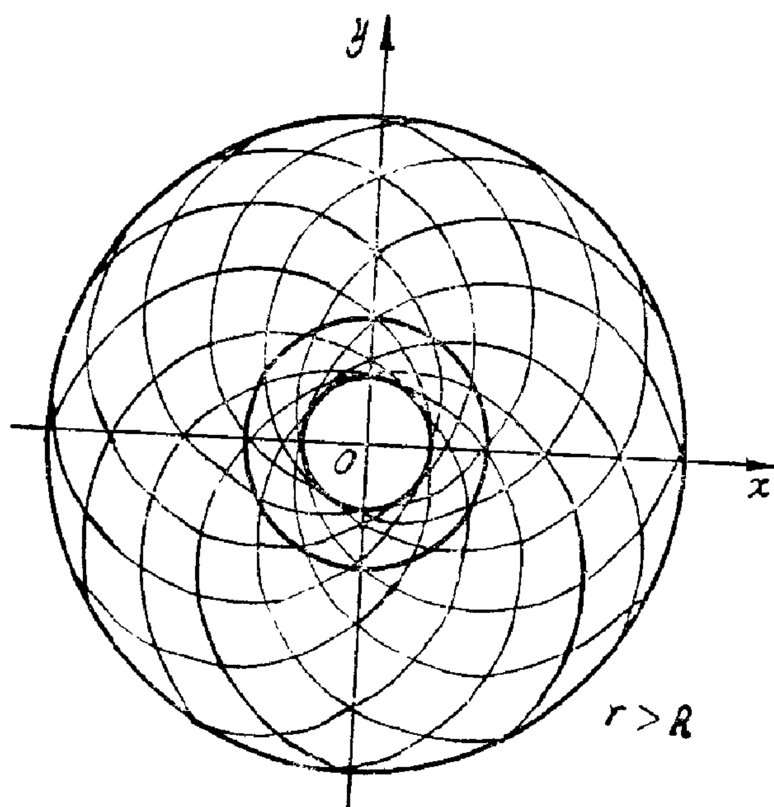


图 132

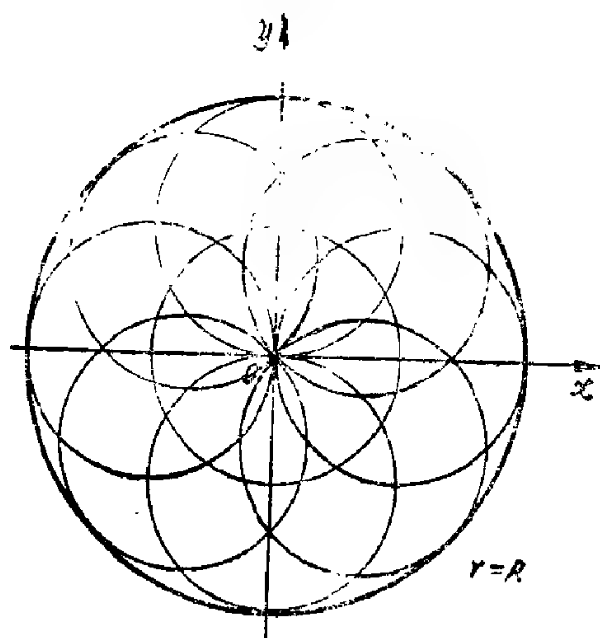


图 133

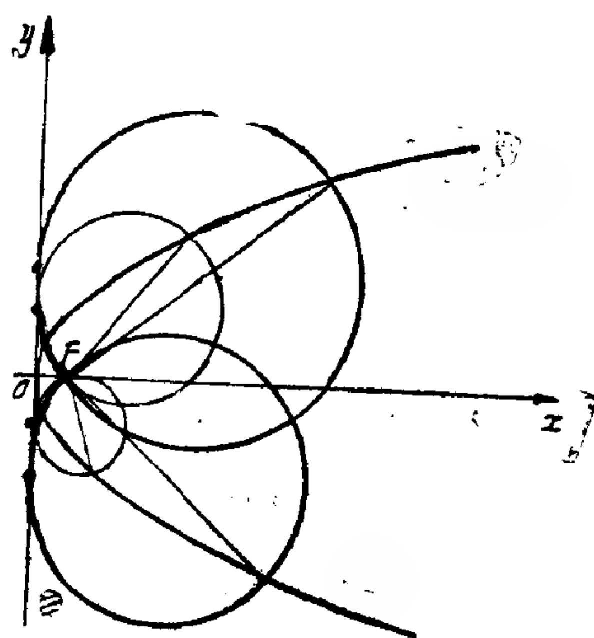


图 134

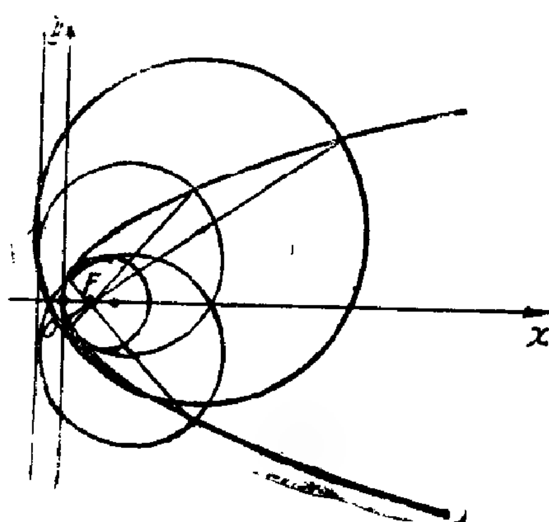


图 135

观察弦平行Oy轴的情况。族的中心坐标是$x_0 = a\cos\varphi$，$y_0 = 0$，半径为$R = b\sin\varphi$，$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$。圆族方程为：

$$(x - a\cos\varphi)^2 + y^2 = b^2\sin^2\varphi。$$

判别曲线由方程

$$\left.\begin{aligned}(x - a\cos\varphi)^2 + y^2 = b^2\sin^2\varphi,\\ a(x - a\cos\varphi) = b^2\cos\varphi\end{aligned}\right\}$$

给出。

因为从第一个方程可得出$|x - a\cos\varphi| \leqslant b\sin\varphi$，因此从第二个方程求得$b^2|\cos\varphi| \leqslant ab\sin\varphi$或$|\mathrm{tg}\varphi| \geqslant b/a$，即判别曲线仅仅对于$|\mathrm{tg}\varphi| \geqslant b/a$的圆才有定义。消去参数$\varphi$：

$$\cos\varphi = \frac{ax}{a^2 + b^2}，\sin^2\varphi = 1 - \frac{a^2x^2}{a^2 + b^2}。$$

族方程记为：$\left(x - \frac{a^2x}{a^2 + b^2}\right)^2 + y^2$

$$= b^2\left(1 - \frac{a^2x^2}{(a^2 + b^2)^2}\right),$$

故得$b^4x^2 + y^2(a^2 + b^2)^2 - b^2(a^2 + b^2)^2 + a^2b^2x^2 = 0$，或

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1。$$

容易验证，当参数φ取上述值时判别曲线将是包络(图136)。

如果弦平行Ox轴（图137），则可求得类似结论。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + b^2} = 1，\ |\mathrm{tg}\varphi| \leqslant b/a。$$

309. 提示：此题可象上题那样解决。双曲线的参数方程应取为：

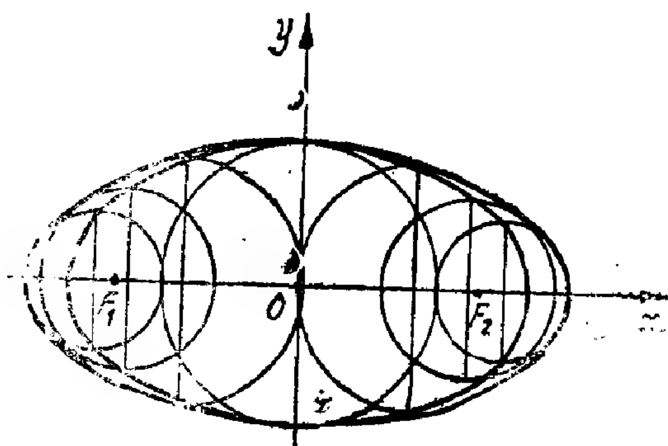


图 136

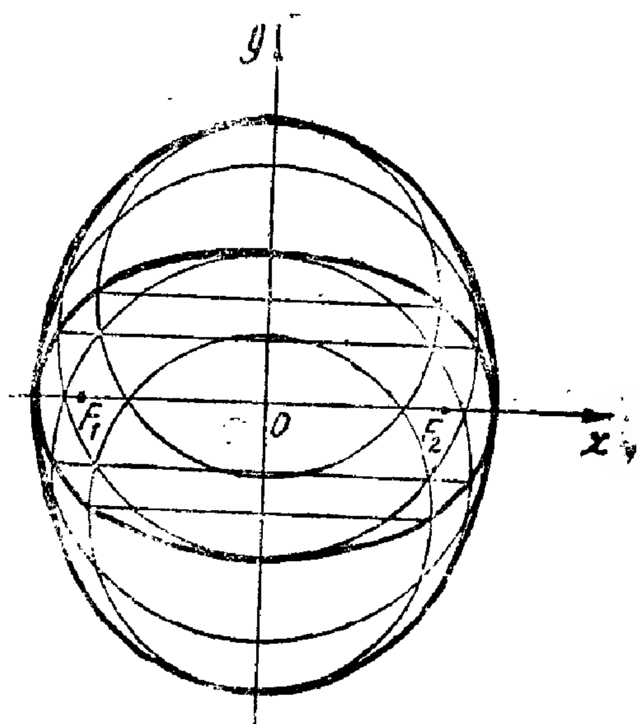


图 137

$$x = a\operatorname{ch} t, \quad y = b\operatorname{sh} t。$$

如果弦平行Oy轴，则包络仅在$b < a$时存在，它的方程是

$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，它仅包络$|\text{th } t|\leqslant b/a$这样的圆(图138)。

如果弦平行Ox轴，则包络在a和b为任何值时均存在。在$b\neq a$时，它由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$给出，且在$b>a$时它包络所有的圆（图139），而在$b<a$时，仅包络$|\text{th}t|\leqslant b/a$这样的圆（图140）。在$b=a$时包络不存在。（图141）。

310. 抛物线$y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$。它是族中$C\geqslant p/2$的圆的包络（图142）。

311. $y^2=2(p+q)x$（图143）。

312. 包络的点应该满足方程组$F(x、y、\alpha、\beta)=0$，$\varphi(\alpha、\beta)=0$，$\frac{D(F,\ \varphi)}{D(\alpha,\ \beta)}=0$。

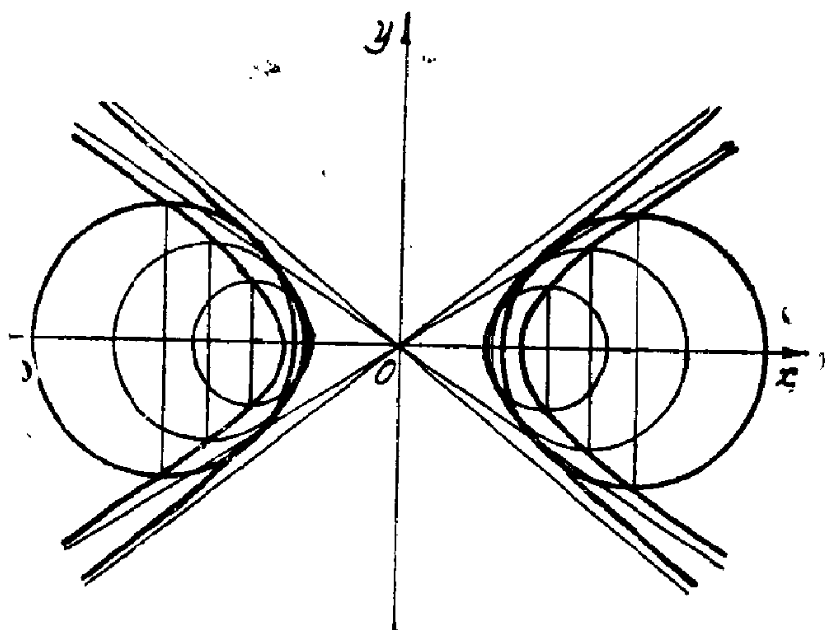


图 138

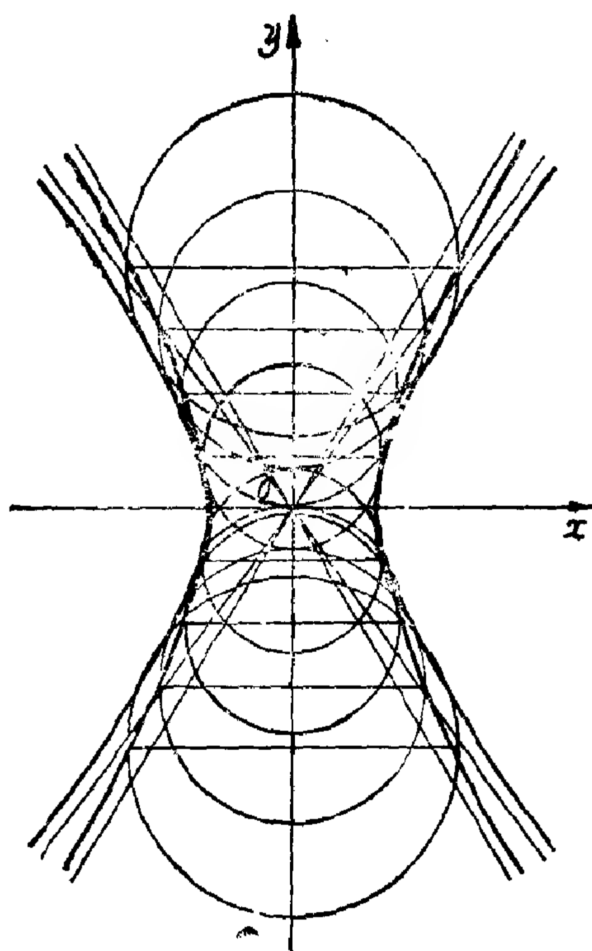


图 139

313. 四条直线 $x \pm y = \pm 1$（图144）。

314. $x^k + y^k = a^k$，$k = m/(m+1)$；
在 $m = 2$ 时是星形线；在 $m = 1$ 时，是抛物线。
$(x - y)^2 - a(2x + 2y - a) = 0$；在 $m = -2$ 时，是圆 $x^2 + y^2 = a^2$。

315. 在已知的竖直平面上选取直角坐标系 xOy，使已知点为坐标原点，Oy 轴的方向竖直向上，那么曲线族的参数方程将为：$x = v_0 t\cos\alpha$，$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$，

其中α是族的参数，则有

$$\frac{\partial x}{\partial t}=v_0\cos\alpha,\quad \frac{\partial y}{\partial t}=v_0\sin\alpha-gt$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}=-v_0t\sin\alpha,\quad \frac{\partial y}{\partial \alpha}=v_0t\cos\alpha$$

使雅科比行列式$\frac{D(x,\ y)}{D(t,\ \alpha)}$等于零，得$v_0^2t-gt^2v_0\sin\alpha=0$，故得$t=\frac{v_0}{g\sin\alpha}$和包络曲线的参数方程为：

$$x=\frac{v_0^2}{g}\operatorname{ctg}\alpha,\quad y=\frac{v_0^2}{g}-\frac{v_0^2}{2g\sin^2\alpha}。$$

消去α得：$y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$。

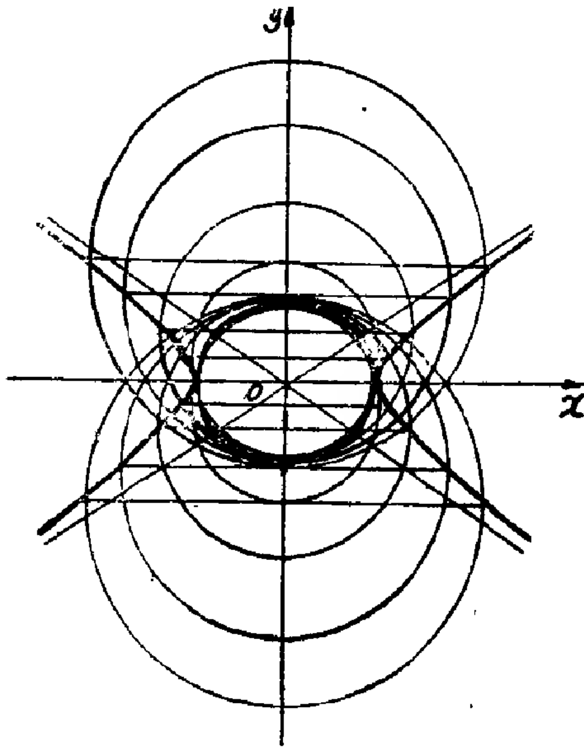


图 140

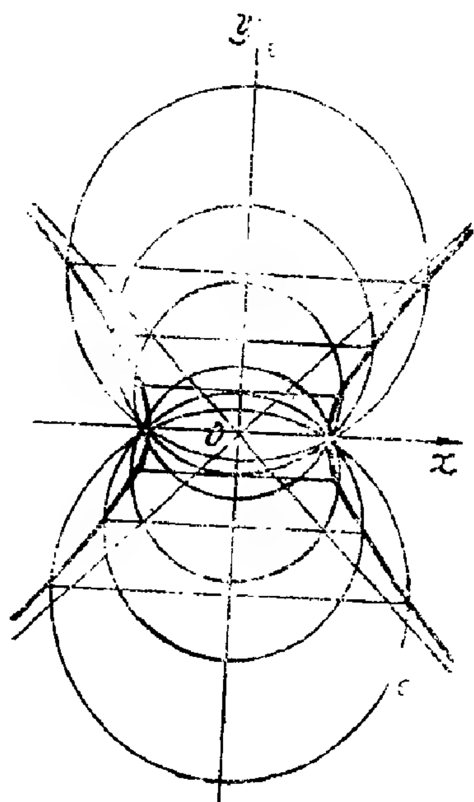


图 141

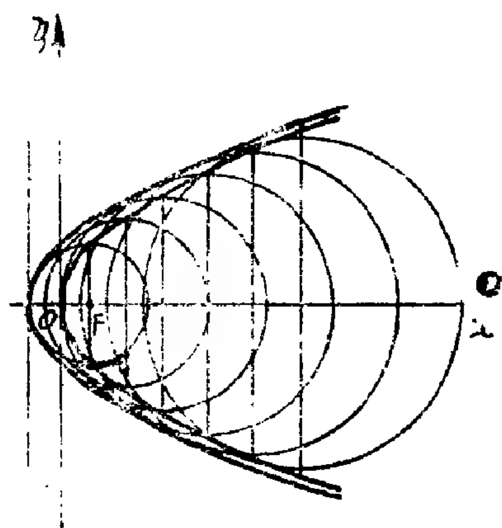


图 142

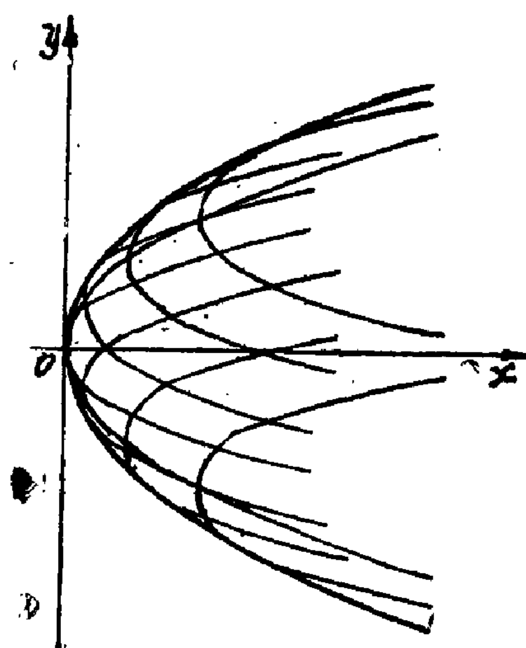


图 143

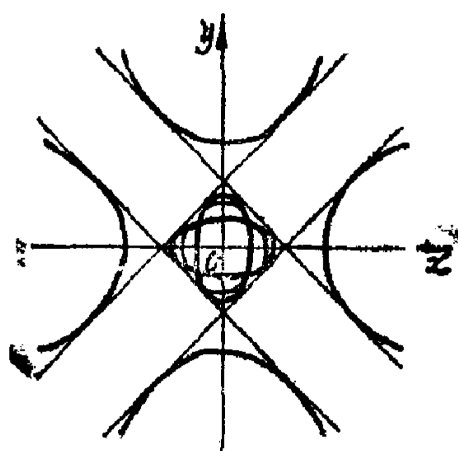


图 144

这样，抛物线是判别曲线，它的轴的方向沿Oy轴垂直向下，焦参数等于v_0^2/g，而顶点位于点$M_0(0, v_0^2/2g)$。判别曲线是包络（图145）。

316. 曲线族方程（图146）：$x = a\cos v\cos u$，$y = a\sin v\sin u$。使雅科比行列式$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$等于零，得$\sin^2 v\cos^2 u - \cos^2 v\sin^2 u = 0$，或$\sin(u+v)\sin(u-v) = 0$，或$v = -u$，$v = \pi - u$，$v = u$，$v = -\pi + u$。判别曲线由四条直线段$x \pm y = \pm a$组成。这是正方形的四个边，正方形的顶点为圆在坐标轴上的直径与该圆的交点。正方形的每条边都是包络（图147）。

317. $s = \frac{1}{27}[(4+9x_2)^{3/2} - (4+9x_1)^{3/2}]$。

318. $s = \sqrt{1+x_2^2} - \sqrt{1+x_1^2} - \ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right| + \ln\frac{1+\sqrt{1+x_1^2}}{1+\sqrt{1+x_2^2}}$

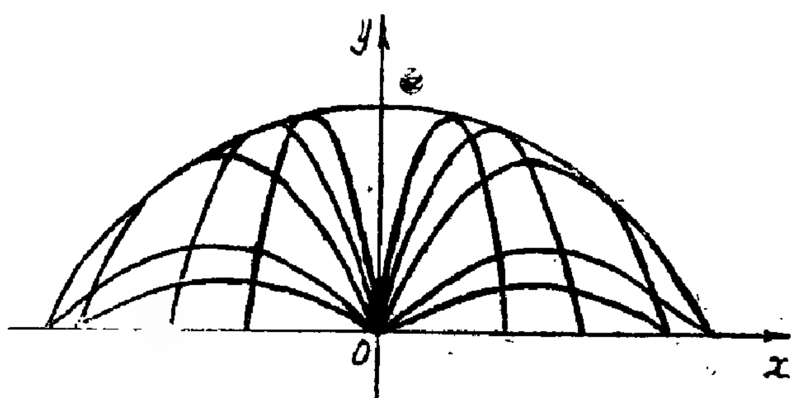


图 145

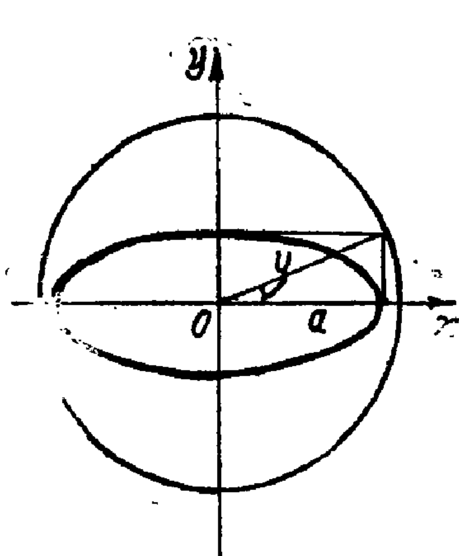


图 146

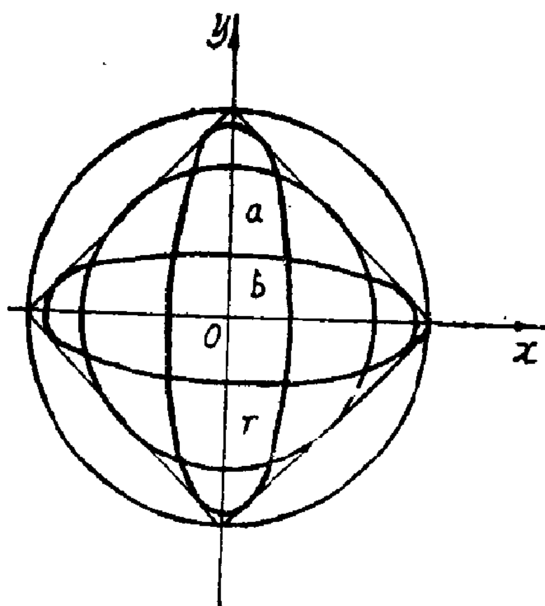


图 147

319. $s = a\ (\mathrm{sh}\frac{x_2}{a} - \mathrm{sh}\frac{x_1}{a})$。

320. $s = \ln\left|\frac{\mathrm{sh}\, x_2}{\mathrm{sh}\, x_1}\right|$。

321. $s = a(t_2^2 - t_1^2)/2$。

322. $s = a(\ln\sin t_2 - \ln\sin t_1)$，其中$0 < t_1$，

$t_2 \leqslant \pi/2$ 或 $\pi/2 \leqslant t_1$，$t_2 < \pi$。

323. $s = \ln \operatorname{tg}(5\pi/12)$。

324. $s = 2\sqrt{3}$。

325 $s = \frac{15}{4} + \ln 2$。

326. $s = \ln \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} - \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$。

327. $s = (\operatorname{ch} 4 - 1)/2$。

328. $s = 24a$。

329. $s = 2a[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$。

330. $s = 8a$。

331. $s = 8am(m+1)$。

332. $s = 6a$。

333. $s = 8a$。

334. $s = 16a/3$。

335. $s = \frac{3}{2}\pi a$。

336. $s = \frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]$

338. 悬链线，点A是顶点。

342. $x = R\cos(s/R)$，$y = R\sin(s/R)$。

343. $x = \operatorname{Arsh}(s/a)$，$y = \sqrt{a^2 + s^2}$。

344. $\kappa = |\sin x|/(1 + \cos^2 x)^{3/2}$。

345. $\kappa = a/y^2$。

346. $\kappa = \sqrt{p}/(p + 2x)^{3/2} = p^2/(y^2 + p^2)^{3/2}$。

347. $\kappa = \frac{6}{t(4 + 9t^2)^{3/2}}$。

348. $\kappa=\dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$。

349. $\kappa=\dfrac{ab}{(a^2\mathrm{sh}^2 t+b^2\mathrm{ch}^2 t)^{3/2}}$。

350. $\kappa=\dfrac{1}{4a|\sin(t/2)|}$。

351. $\kappa=2/(3a|\sin 2t|)$。

352. $\kappa=(2+\varphi^2)/a(1+\varphi^2)^{3/2}$。

353. $\kappa=\dfrac{3}{4a|\cos(\varphi/2)|}$。

354. $$\kappa=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}$$

355，356. $\kappa=\dfrac{a^4b^4}{(b^2x^2+a^4y^2)^{3/2}}$

$=\dfrac{ab}{|a^2-\varepsilon^2x^2|^{3/2}}$，其中$\varepsilon$是离心率。

357. $\kappa=0$。

358. $$\kappa=\frac{\left|P\left(Q\frac{\partial Q}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+Q\left(P\frac{\partial P}{\partial y}-Q\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right|}{(P^2+Q^2)^{3/2}}$$

359. 提示：$h=|\overline{\alpha}\times\Delta\overline{r}|$，其中$\overline{\alpha}$是切线的单位矢量

363. $R=a\,\mathrm{ctg}\,t$。

367. 椭圆$x=a\cos t$，$y=b\sin t$在顶点$A(t=0)$的曲率中心是$D(c^2/a,\ 0)$，在顶点$B(t=\pi/2)$是$E(0,-c^2/b)$，其中$c^2=a^2-b^2$，点D和点E是由点$C(a,\ b)$向AB所作的垂线与坐标轴的交点（图148）。

368. $(x-\frac{c^2}{a})^2+y^2=\frac{b^4}{a^2}$,

$x^2+(y+\frac{c^2}{b})^2=\frac{a^4}{b^2}$。

369. $(x-\frac{\pi}{2})^2+(y-1)^2=1$。

370. $(x-2)^2+(y-2)^2=2$,

$(x+2)^2+(y+2)^2=2$。

371. $(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{\sqrt{2}})$。

372. 曲率最小的点：$((2n+1)a\pi, a+d)$；曲率最大的点$(2na\pi, a-d)$（n为任意的自然数）。

373. $A(3\pi/2, a)$和$B(0, 0)$。

376. $r=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$; $x_0=p+\frac{3y^2}{2p}$,

$y_0=-\frac{y^3}{p^2}$。在抛物线顶点O(0,0)有三阶切触。

377. 设曲线L_1由其矢量方程$\overline{r}=\overline{r}_1(s)$给出，其中s是此曲线从点M起截取的弧长，而把点M取成径矢的起点O，我们写出曲线L_1关于在点M所取的弗朗内标架的方程。将表示式$\dot{\overline{r}}_1=\overline{\alpha}_1$，$\ddot{\overline{r}}_1=\kappa_1\overline{\beta}_1$

代入展开式：$r_1(s)=s\dot{r}_1+\frac{s^2}{2}\ddot{r}_1+\cdots$中，得

$$x=s+\cdots,\quad y=\frac{\kappa_1}{2}s^2+\cdots \qquad (*)$$

类似地对曲线L_2有

$$x = s + \cdots, \quad y = \frac{\kappa_2}{2} s^2 + \cdots \qquad (**)$$

设P为切线L上靠近点M的点，过P点作L的垂线分别交曲线L_1，L_2于点M_1，M_2。则由方程(*)，(**)相应地可得到：

$$|PM_1| = \frac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \cdots, \quad |PM_2| = \frac{1}{2}\kappa_2 x^2 + \cdots$$

因为$\kappa_1 < \kappa_2$，因此$|PM_1| < |PM_2|$。(图149)。

380. $y = 1 \pm (\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{8})$。

381. $(y - \frac{8}{5})^2 = \frac{2}{5}(\frac{7}{5} - x)$。

382. 一个点——圆心。

383. $X = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$，$Y = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t$。(图150)。

384. $X = \frac{a^2 + b^2}{a}\operatorname{ch}^3 t$，$Y = \frac{a^2 + b^2}{b}\operatorname{sh}^3 t$ (图151)

385. $X = -4x^2$，$Y = 3x^2 + \frac{1}{2}$ (图152)。

386. $X = \frac{1}{2k-1}[(2k-2)x - 4k^2 x^{4k-1}]$

$$Y = \frac{1 + 2k(4k-1)x^{4k-2}}{2k(2k-1)x^{2k-2}} \qquad \text{(图153)。}$$

387. $X = \frac{1}{2k}[(2k-1)x - (2k+1)^2 x^{4k+1}]$，

$$Y = \frac{1 + (2k+1)(4k+1)x^{4k}}{2k(2k+1)x^{2k-1}} \qquad \text{(图154)。}$$

388. $X = 2x + \frac{1}{x}$，$Y = \ln x - x^2 - 1$ (图155)。

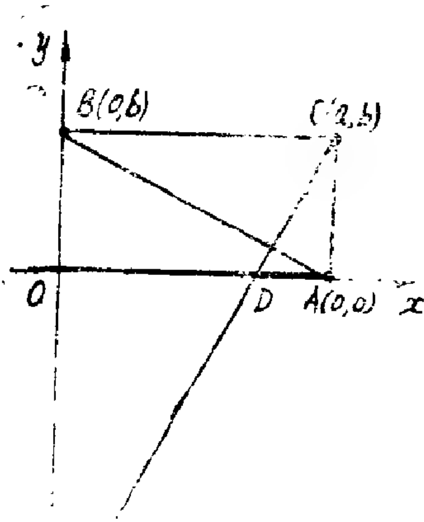


图1'8

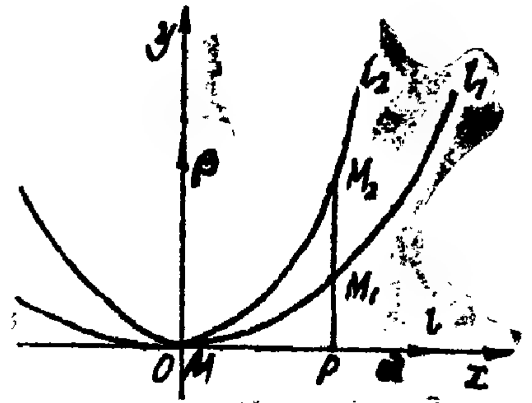


图149

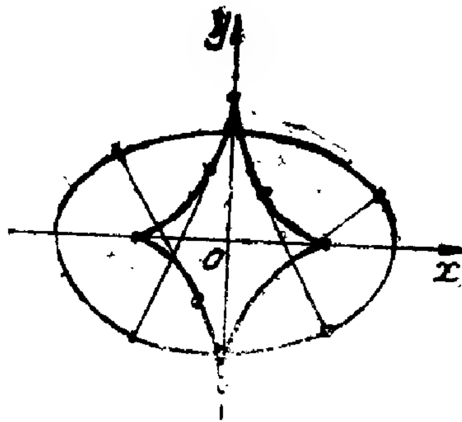


图150

389. $X = x + \cos x \dfrac{1 + \cos^2 x}{\sin x}$,

$Y = -\dfrac{2\cos^2 x}{\sin x}$ (图156)。

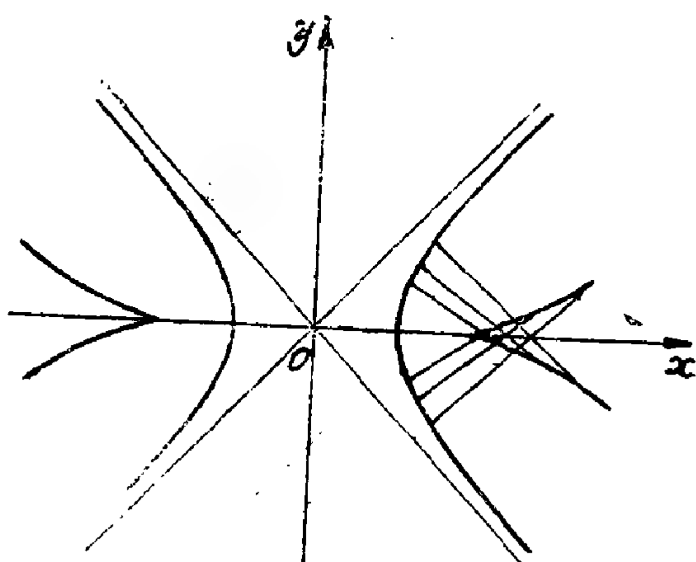


图151

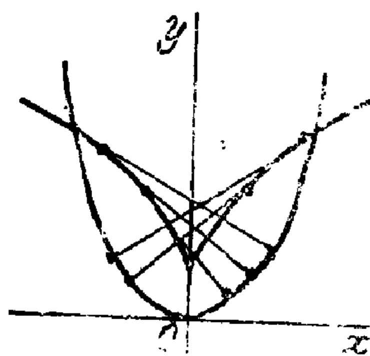


图152

390. $X = x - \frac{1+\cos^4 x}{\cos^2 x \sin 2x}$, $Y = \operatorname{tg} x + \frac{1+\cos^4 x}{\sin 2x}$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (图157)。

391. $X = a\ln\operatorname{tg}(\frac{t}{2})$, $Y = \frac{a}{\sin t}$,

或 $Y = a\operatorname{ch}(X/a)$ (图158)。

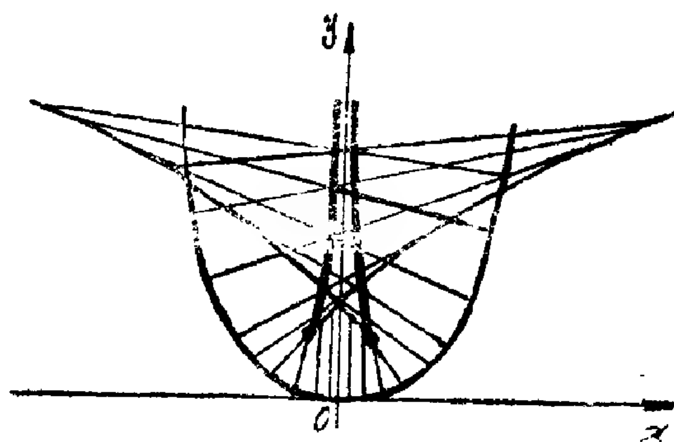


图 153

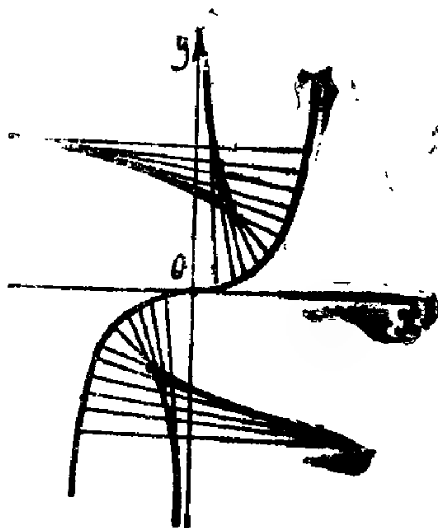


图 154

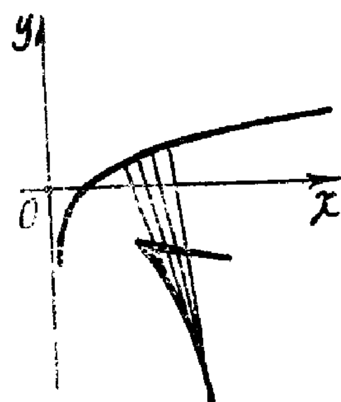


图 155

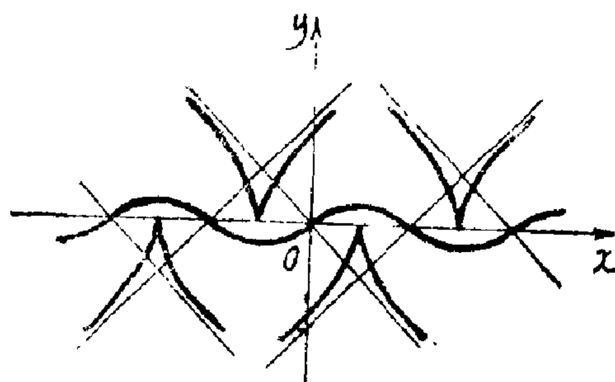


图 156

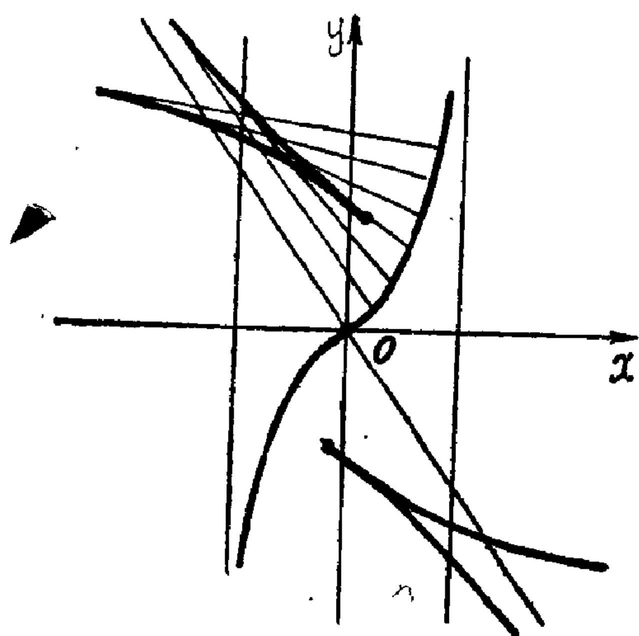


图 157

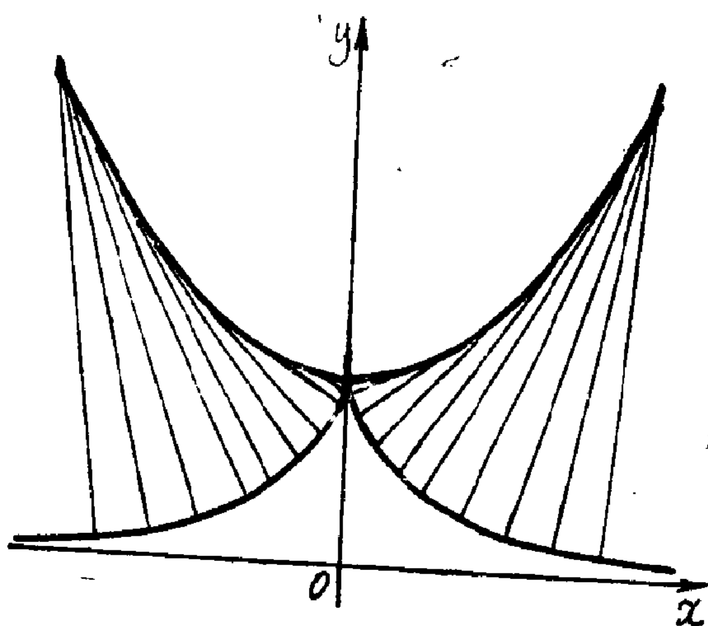


图 158

392. $X = \frac{a}{3}(\cos\varphi - \cos^2\varphi + 2)$，

$Y = \frac{a}{3}(1 - \cos\varphi)\sin\varphi$。

这是心脏线（图159）。为了证明只要进行参数变换，$\varphi = \pi - t$ 和根据公式 $X' = -(X - \frac{2}{3}a)$，$Y' = Y$ 作坐标变换。

393. 图160。

394. 图161

395. 图162。

396. $\ln a = a^{\frac{\pi}{2}}$。

397. $X = a(\cos t + (t - C)\sin t)$，

$Y = a(\sin t - (t - C)\cos t)$。

其中C是渐伸线族的参数（图163）。

398. $X = a(\ln tg(t/2) + \cos t)$，$Y = a\sin t$ ——曳物线（参看图158）。

399. $X = \frac{t}{2} + \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}(C - \ln(t + \sqrt{t^2+4}))$

$Y = \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}(C - \ln(t + \sqrt{t^2+4}))$。

400. $s = 6a$，提示：利用渐缩线的下面性质：如果曲线的曲率半径单调变化，则渐缩线在两点间的弧长等于原曲线在这两点的曲率半径值的差。

401. 402. $s = 8a$。

403. $(27s + 8)^2 = [4 + 9\frac{36R^2}{(27s+8)^2}]^3$。

404. $s = \sec\alpha + \ln tg(\frac{\alpha}{2})$，$\kappa = \sin\alpha\cos^2\alpha$，

其中 $tg\,\alpha = x$。

405. $R^2 = 2as$。

406. $R^2 + a^2 = a^2 e^{-2s/a}$。

407. $s^2 + 9R^2 = 16a^2$。

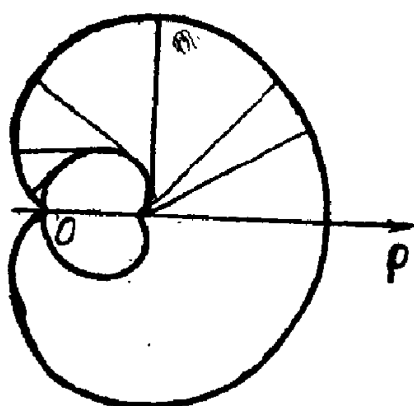


图 159

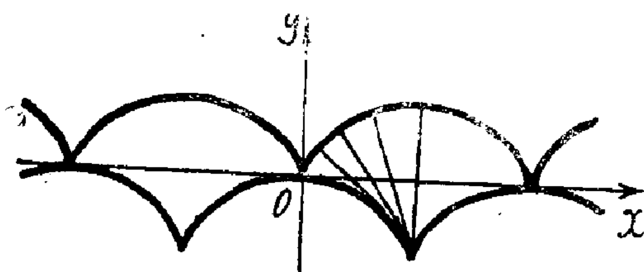


图 160

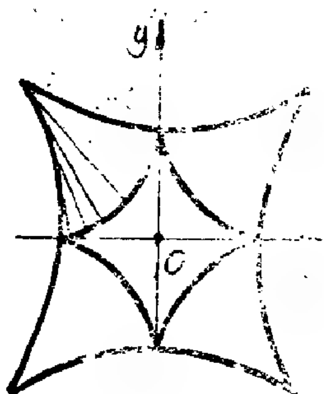


图 161

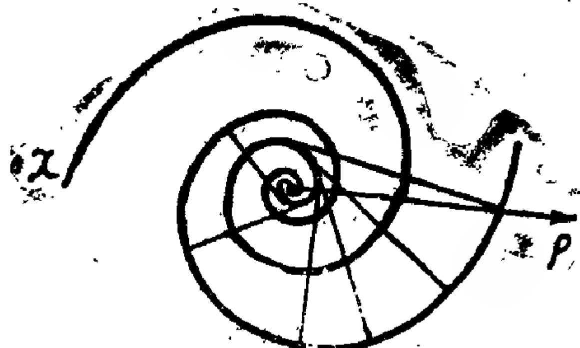


图 162

408. 半径为 $\frac{1}{a}$（若 $a \neq 0$）的圆和直线（若 $a = 0$）。

409. 对数螺线。

410. 设 $s = \operatorname{tg}\alpha$，则有： $x = \frac{a}{2}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$，

$$y = \frac{a}{\cos\alpha};$$

故得 $y = a\operatorname{ch}(x/2)$ ——悬链线。

411. $x = a(2t + \sin 2t)$，$y = a(2 - \cos 2t)$ ——摆线。

412. $x = -\frac{a}{2\sin^2\varphi}$，$y = -a\operatorname{ctg}\varphi$ ——抛物线。

413. $x = \frac{a}{2}e^{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi)$，

$y = \frac{a}{2}e^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi)$ ——对数螺线。

414. $x = a(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)$，

$y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$ ——圆的渐伸线。

415. $x = a\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$，$y = \frac{a}{\cos\varphi}$ ——悬链线。

416. 如果选择坐标轴如图164所示，则我们所需要的旋轮线的参数方程可写为：

$$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)。$$

下落物体的速度按公式 $v = \sqrt{2gh}$ 确定，在我们的题目里 $h = y - y_0 = a(\cos t_0 - \cos t)$，其中，$t_0$ 和 t 对应于点 M_0 和 M。因此，$v = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}$。但速度 v 是路程 S 对时间 T 的导数：$v = \frac{ds}{dT}$。注意到对旋轮

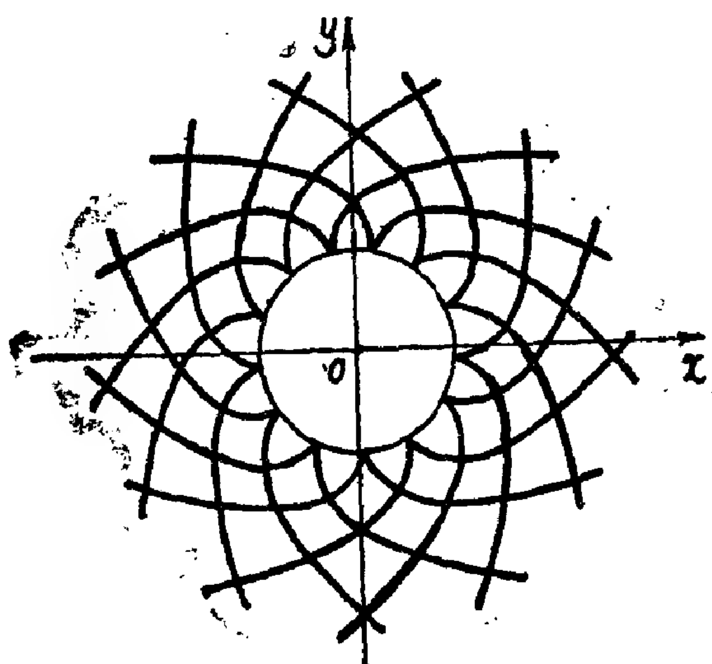


图 163

线有：$ds=2a\sin(\frac{t}{2})\,dt$，我们得到为确定时间T的微分方程：

$$\frac{dT}{dt}=\frac{2a\sin(t/2)}{\sqrt{2ga(\cos t_0-\cos t)}}。$$

对它积分，求得质点在由M_0到A移动中所花费的时间T：

$$T=\int_{t_0}^{\pi}\frac{2a\sin(t/2)dt}{\sqrt{2ga(\cos t_0-\cos t)}}$$

$$=-2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi}\frac{d\cos(t/2)}{\sqrt{\cos^2(t_0/2)-\cos^2(t/2)}}$$

$$=\pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

此即需要证明的。

417. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (图165)

投影：1) $x^2 + y^2 = a^2$;　2) $y = a\sin(\frac{z}{b})$;

3) $x = a\cos(\frac{z}{b})$。

418. $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = be^{\varphi}$

419. 适当选择坐标系，维维安尼曲线的方程可写为：

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 - Rx = 0。\end{aligned}\right\}$$

取球面上点M的经度为参数u，由三角形AOP，OPM和OPQ可求得

$$x = R\cos^2 u,\quad y = R\cos u\sin u,\quad z = \pm R\sin u。$$

也可以取其它参数方程。特别是可将方程

$$x^2 + y^2 - Rx = 0$$

变形为

$$(x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = \frac{R^2}{4},$$

并假定

$$x - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}\cos t,\quad y = \frac{R}{2}\sin t,$$

得

$$x = \frac{R}{2}(1 + \cos t),\quad y = \frac{R}{2}\sin t,$$

$$z = \pm R\sin\frac{t}{2}。$$

420. 1)引入极坐标系，点M的位置用它离点O的距离

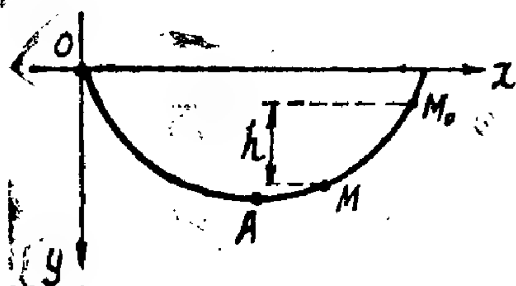


图164

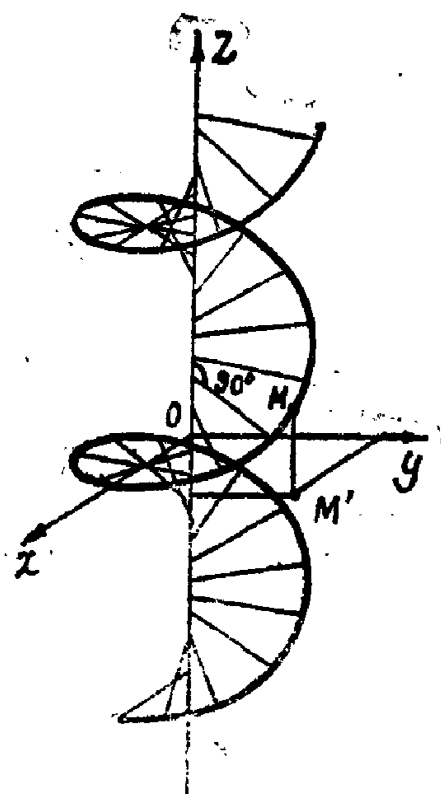


图 165

r、纬度$\psi=\widehat{POL}$和经度$\varphi=\widehat{xOP}$（图167）来确定。据条件有$\psi=\frac{\pi}{2}-\lambda$，其中$\lambda=\widehat{zOL}$，而$\varphi=\omega t$。由条件$\frac{dr}{dt}=mr$确定$r$，并把所求得的值$r=r_0e^{mt}$代入方程

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\psi\cos\varphi, \\ y &= \cos\psi\operatorname{sim}\varphi, \\ z &= r\sin\varphi。\end{aligned}\right\}$$

得：$x=ae^{k\varphi}\cos\varphi$，$y=ae^{k\varphi}\sin\varphi$，$z=be^{k\varphi}$，

其中$k=m/\omega$，$a=r_0\sin\lambda$，$b=r_0\cos\lambda$。

2) $x=at\cos t$，$y=at\sin t$，$z=bt$。

421. $\left.\begin{array}{l} x^2+z^2=a^2, \\ y^2+z^2=b^2, \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t, \\ y=\pm\sqrt{b^2-a^2\sin^2 t}, \\ z=a\sin t \end{array}\right\}$$

在 $a=b$ 时，得到两个椭圆（图168）。

422. 提示：消去参数 t。

423. $y=x$，$z=0$；$z=x^3$，$y=0$；
$z^2=y^3$，$x=0$。

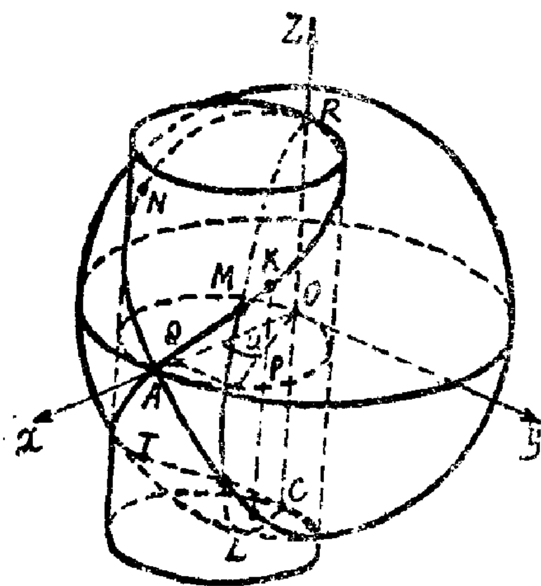


图 166

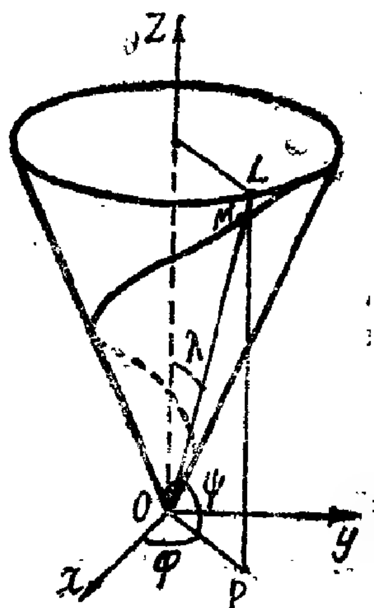


图 167

424. $x^2-y^2=a^2$，$z=0$；$x=a\,\mathrm{ch}(z/c)$，
$y=0$；$y=a\,\mathrm{sh}(z/c)$，$x=0$。

425. $x^2-y^2-x-y+1=0$，$z=0$。
提示：从已知方程中消去 z。

428. 例如，$y=x^2$，$z=e^x$。

429. 所求柱面方程：$x^2+(y-1)^2=1$，

$$\frac{y}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2=1。$$

432. 直线 $x=y$，$z=1$；$x=-y$，$z=1$；

$x=y$，$z=-1$；$x=-y$，$z=-1$。

433. $$\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-\frac{a\pi}{4}}{a}。$$

434. $$\frac{x-e}{e}=\frac{y-e^{-1}}{-e^{-1}}=\frac{z-1}{2}。$$

435. $x=y+1=z$。

436. $x+\frac{a}{2}(4-\pi)=y=\frac{1}{\sqrt{2}}z-a$；$\varphi=\frac{\pi}{4}$。

437. $M_1(-2, 12, 14)$，$M_2(-2, 3, -4)$。

438. $$\left.\begin{array}{l}x=2,\\ 2y-z=0,\end{array}\right\}\ y+2z=0。$$

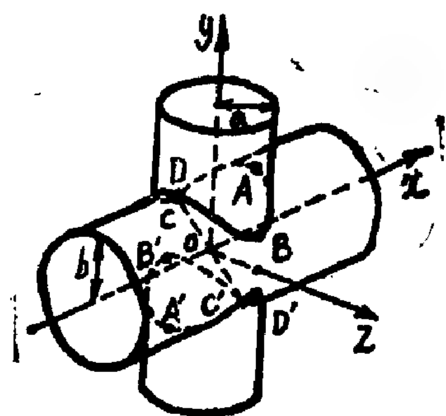


图 168

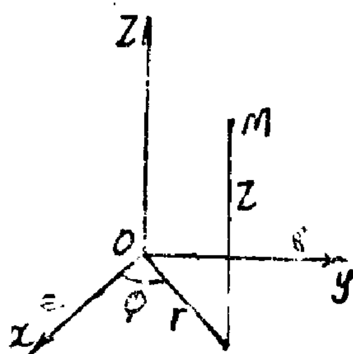


图 169

439. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$,

$x+2y+3z-6=0$。

所有切线与 xOy 平面相交得抛物线 $y=\dfrac{3}{4}x^2$。

441. $\dfrac{X-x}{2yz}=\dfrac{Y-y}{z(R-2x)}=\dfrac{Z-z}{-Ry}$;

$2yzX+z(R-2x)Y-RyZ=0$。

442. 圆 $x^2+y^2=a^2/(a^2+b^2)$,

$z=b/\sqrt{a^2+b^2}$。

(螺旋线的方程取为: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$)。

444. 设 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 为曲线的参数方程。有恒等式成立:

$$F(x(t),\ y(t),\ z(t))\equiv 0$$

$$\Phi(x(t),\ y(t),\ z(t))\equiv 0$$

故得:
$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz=0。$$

这些式子确定微分的关系为

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{dy}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{dz}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\end{vmatrix}}$$

这样，切线方程可取为:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{vmatrix}}$$

而法平面方程为

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{vmatrix}(Y-y)+$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{vmatrix}(Z-z)=0,$$

或：

$$\begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{vmatrix}=0。$$

445. $\frac{X-x}{ay}=\frac{Y-y}{bx}=\frac{Z-z}{xy}$;

$ay(X-x)+bx(Y-y)+xy(Z-z)=0$,

$x^2+y^2\neq 0$。

446. $\frac{X}{x}-\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=1$, $xyz\neq 0$。

451. $3x+3y+z+1=0$,

$3x-3y+z-1=0$,

$108x-18y+z-216=0$。

453. $bX+aY+abZ=2ab$。

454. $[X\sin(t-\alpha)-Y\cos(t-\alpha)]\sin\alpha+Z$
$=t\sin\alpha+\cos\alpha$。

455. $4x-y+z-9=0$。

457. $\frac{x}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z-1}{-1}$ ——主法线方程。

$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$ ——付法线方程。

458. $\frac{x-1}{11}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{-9}$ ——主法线方程。

$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}$ ——付法线方程。

460. $A(1, \ln 2, -4)$。

462. $\overline{\alpha}=\frac{\overline{j}+\overline{k}}{\sqrt{2}}$, $\overline{\beta}=\frac{2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}}{\sqrt{6}}$,

$\overline{\gamma}=\frac{\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}}{\sqrt{3}}$。

463. $\overline{\alpha}=-\frac{3}{5}\cos t\,\overline{i}+\frac{3}{5}\sin t\,\overline{j}-\frac{4}{5}\overline{k}$,

$\overline{\beta}=\sin t\,\overline{i}+\cos t\,\overline{j}$,

$\overline{\gamma}=\frac{4}{5}\cos t\,\overline{i}-\frac{4}{5}\sin t\,\overline{j}-\frac{3}{5}\overline{k}$。

464. $\overline{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{t}{2}\,i+\cos\frac{t}{2}\overline{j}-\overline{k})$,

$\overline{\beta}=\cos\frac{t}{2}\overline{i}-\sin\frac{t}{2}\overline{j}$,

$$\overline{\gamma} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{t}{2}\overline{i} + \cos\frac{t}{2}\overline{j} + \overline{k}\right)。$$

466. 切线：$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{z - bt}{b}$，

法平面：$(a\sin t)X - (a\cos t)Y - bZ + b^2 t = 0$；

付法线：$\frac{X - a\cos t}{a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{-b\cos t} = \frac{Z - bt}{a}$

密切面：$(b\sin t)X - (b\cos t)Y + aZ - abt = 0$；

主法线：$\frac{X - a\cos t}{\cos t} = \frac{Y - a\sin t}{\sin t}$，$Z = bt$；

从切面：$X\cos t + Y\sin t - a = 0$；

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\sin t\,\overline{i} + a\cos t\,\overline{j} + b\overline{k}),$$

$$\overline{\beta} = -\cos t\,\overline{i} - \sin t\,\overline{j},$$

$$\overline{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b\sin t\,\overline{i} - b\cos t\,\overline{j} + a\overline{k})。$$

467. $\overline{\rho}_1 = \overline{r} - \frac{\overline{r} \cdot \overline{k}}{\dot{\overline{r}} \cdot \overline{k}}\dot{\overline{r}}$，

$$\overline{\rho}_2 = \overline{r} - \frac{\overline{r} \cdot \overline{k}}{\ddot{\overline{r}} \cdot \overline{k}}\ddot{\overline{r}},$$

$$\overline{\rho}_3 = \overline{r} - \frac{\overline{r} \cdot \overline{k}}{(\overline{k}, \dot{\overline{r}}, \ddot{\overline{r}})}(\dot{\overline{r}} \times \dddot{\overline{r}}),$$

其中：在字母上的点号表示对参数 s 微分。

468. $s = \sqrt{a^2 + b^2}\,t$。

469. $X = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $Y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$Z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

470. $s = 8\sqrt{2}a$。

471. $s = 9a$。

473. $s = a\sqrt{2}\,\text{sh}\,t$。

474. $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$。

提示：圆柱坐标 r、φ、z 与笛卡尔直角坐标 x、y、z 由下列公式相联系：$x = r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$，$z = z$（图169）。

754. $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$。

提示：球面坐标 ρ、θ、φ 与笛卡尔直角坐标 x、y z 由下列公式相联系：

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$，$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$，$z = \rho\cos\theta$（图170）。

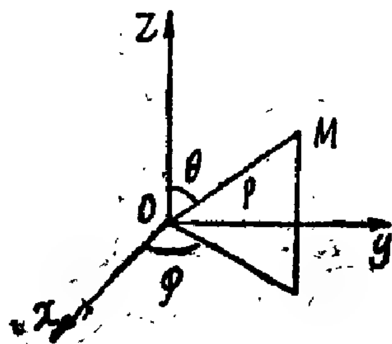


图 170

476. 提示：应用弗朗内公式

$$\dot{\overline{\alpha}} = \kappa\overline{\beta},\quad \dot{\overline{\beta}} = -\kappa\overline{\alpha} + \tau\overline{\gamma},\quad \dot{\overline{\gamma}} = -\tau\overline{\beta},$$

并注意到 $\dot{\overline{r}} = \overline{\alpha}$，可求得

$$\ddot{\overline{r}} = \kappa\overline{\beta},\quad \dddot{\overline{r}} = \ddot{\overline{\alpha}} = (\kappa\overline{\beta})^{\cdot}$$

$$= -\kappa^2\overline{\alpha} + \kappa\tau\overline{\gamma} + \dot{\kappa}\overline{\beta}。$$

477. 将所求矢量写为$\overline{\omega} = a\overline{\alpha} + b\overline{\beta} + c\overline{\gamma}$，并利用题目条件，可求得：$\overline{\omega} = \tau\overline{\alpha} + \kappa\overline{\gamma}$。

矢量$\overline{\omega}$是当点沿曲线以单位速度移动时弗朗内标架的即时角速度矢。

484. $\kappa = a/(a^2+b^2)$，$\tau = b/(a^2+b^2)$。

485. $\kappa = 2/(1+a^2)$。

486. $\kappa = \tau = \dfrac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$。

487. $\kappa = -\tau = \dfrac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$。

488. $\kappa = -\tau = 2t/(1+2t^2)^2$。

489. $\kappa = \dfrac{3}{25\sin t\cos t}$，$\tau = \dfrac{4}{25\sin t\cos t}$。

490. $a = b$

491. 对应于参数值 $t = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)$的点。

492. 对应于参数值$t = 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$的点。

494. $x - 4y + 2z + 1 = 0$。

495. $\begin{vmatrix} x - c_1 & y - c_2 & z - c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$。

496. $f(t) = c_1 + c_2\sin t + c_3\cos t$。

497. 1）设$\overline{\delta}$是一个固定方向的单位矢量，那么

$$\overline{\delta}\cdot\overline{\alpha}=\cos v\ (v=\text{常数})。\qquad (*)$$

对s微分等式(*)　$\overline{\delta}\cdot\dot{\alpha}=0$,

因此，$\kappa\overline{\delta}\cdot\overline{\beta}=0$，除$\kappa\equiv 0$（直线）的情况外，得

$$\overline{\delta}\cdot\overline{\beta}=0 \qquad (**)$$

因此，主法线垂直固定方向。

反之，如果在流动点的矢量$\overline{\beta}$垂直固定方向，则等式（*）成立。

2)设$\tau\neq 0$,并考虑到第三个弗朗内公式,由(**)得:

$$\overline{\delta}\cdot\dot{\overline{\gamma}}=0,$$

故得　$\overline{\delta}\cdot\overline{\gamma}=$常数。　　(***)

反之，微分（***），得（**）。

③微分（**）得

$$\kappa\overline{\delta}\cdot\overline{\alpha}=\tau\overline{\delta}\cdot\overline{\gamma},$$

因此$\frac{\kappa}{\tau}=(\overline{\delta}\cdot\overline{\gamma})/(\overline{\delta}\cdot\overline{\alpha})=$常数

反之，由第一和第三个弗朗内公式得

$$\frac{\dot{\overline{\alpha}}}{\kappa}+\frac{\dot{\overline{\gamma}}}{\tau}=\overline{0},$$

因此$\frac{\tau}{\kappa}\cdot\dot{\alpha}+\dot{\gamma}=\overline{0}$，$\frac{\tau}{\kappa}\alpha+\overline{\gamma}=$常矢$=\overline{\delta}$,

以$\overline{\beta}$作数量积，得$\overline{\delta}\cdot\overline{\beta}=0$。因此，满足条件（**）。

498．提示：$(\ddot{\overline{r}},\dddot{\overline{r}},\overline{r}^{(4)})=\kappa^5\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\cdot}$,

其次利用497题

501. 设$\{1, u, v\}$是定方向，曲线的切线与此方向的夹角决定于等式

$$\cos\varphi=\frac{a+2btu+3ct^2v}{\sqrt{1+u^2+v^2}\sqrt{a^2+4b^2t^2+9c^2t^4}}。$$

φ不依赖于t的条件在于，分式

$$\frac{(3cvt^2+2but+a)^2}{9c^2t^4+4b^2t^2+a^2}$$

$$=\frac{9c^2v^2t^4+12bcuvt^3+2(2b^2u^2+3acv)t^2+4abut+a^2}{9c^2t^4+4b^2t^2+a^2}$$

不依赖t，为此只要

$$4abu=0,\ 12bcuv=0,$$

$$\frac{9c^2v^2}{9c^2}=\frac{2(2b^2u^2+3acv)}{4b^2}=\frac{a^2}{a^2}$$即可，

故得：$u=0$，$v^2=1$，$2b^2=\pm3ac$。

502. 提示：在此情况$\overline{e}\cdot\overline{\alpha}=0$，将此式微分并利用弗朗内公式。

505. 曲线方程能写为：

$$\overline{r}=\overline{r}(s),\quad \overline{\rho}=\overline{r}+\lambda\overline{\beta}\qquad (*)$$

由条件$\overline{\rho}'\perp\overline{\beta}$可求得$\lambda$＝常数，由矢量$\overline{\rho}', \overline{\rho}'', \overline{\beta}$共面条件可得：$\dot{\tau}+\lambda(\dot{\kappa}\tau-\kappa\dot{\tau})=0$

将后一等式除以τ^2得：$\left(-\frac{1}{\tau}\right)^{\cdot}+\lambda\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}=0$，$\qquad (**)$

$$-\frac{1}{\tau}+\lambda\frac{\kappa}{\tau}=-\mu,$$

故得：$\lambda\kappa+\mu\tau=1\qquad (***)$

反之由（＊＊＊）可得（＊＊），将（＊＊）的λ值代入（＊）即得所求曲线的方程。

509. 根据条件有$\overline{\alpha}^* = \overline{\alpha}$。将这个等式s微分，得：

$$\kappa^* \overline{\beta}^* \cdot \frac{ds^*}{ds} = \kappa \overline{\beta}$$

但因为 $\overline{\beta}^* = \overline{\beta}$ 那么 $\kappa^* \frac{ds^*}{ds} = \kappa$。　　（＊）

其次，将等式$\overline{\gamma}^* = \overline{\gamma}$对s微分，得

$$-\tau^* \overline{\beta}^* \frac{ds^*}{ds} = -\tau \overline{\beta},$$

故得：　$\tau^* \frac{ds^*}{ds} = \tau$。　　（＊＊）

最后，比较（＊）和（＊＊），推得所求关系：

$$\frac{\kappa^*}{\kappa} = \frac{ds}{ds^*} = \frac{\tau^*}{\tau}。$$

510. $\kappa^* = \frac{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{|s|\kappa}$，　$\tau^* = \frac{\tau^2}{s\kappa(\kappa^2+\tau^2)}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{\cdot}$

如果$\frac{\kappa}{\tau}$＝常数，则$\tau^* = 0$。

512. $x = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\cos\varphi$，　$y = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau_2}\sin\varphi$，

$$z = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}\varphi。$$

513. 圆柱螺线的曲率和挠率是常数，因此，存在着无数数对λ和μ的值，使$\lambda\kappa + \mu\tau = 1$。位于与已知螺线同轴的圆柱面上的许多螺旋线与这些$\lambda$和$\mu$对应。

反之，设贝特朗曲线C存在着两条与已知曲线具有公共

主法线的曲线，则

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1\kappa+\mu_1\tau=1\\ \lambda_2\kappa+\mu_2\tau=1\end{array}\right\}\qquad (*)$$

其中$\lambda_1\neq\lambda_2$，因此$\mu_1\neq\mu_2$。不可能有$\lambda_1/\lambda_2=\mu_1/\mu_2$，因为那样由（*）就会推得$\lambda_1=\lambda_2$，$\mu_1=\mu_2$。这样，$\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_2 & \mu_2\end{vmatrix}\neq 0$，并由关系式（*）我们得到$\kappa$和$\tau$的确定的值（常数），即曲线是圆柱螺线。

514. $\kappa=\tau=\dfrac{a}{2a^2+s^2}$。

515. $\kappa=\tau=\dfrac{c\sqrt{2}}{4c^2+s^2}$。

517. 反之不正确，因为在矢量$\dddot{r}$的表达式中包含有$\dot{\tau}$。

518. 因为曲线上两点间的距离等价于它们间的弧长Δs，因此此题归结为计算两直线

$$\overline{\rho}=\overline{r}(s)+\overline{e}(s)\lambda,$$

$$\overline{\rho}=\overline{r}(s+\Delta s)+\overline{e}(s+\Delta s)\lambda$$

间的最短距离，其中$\overline{e}(s)$依次等于$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$，$\overline{\gamma}$。

最短距离按公式

$$d=\frac{|\overline{\gamma}(s+\Delta s)-\overline{r}(s),\ \overline{e}(s),\ \overline{e}(s+\Delta s)|}{\sqrt{(\overline{e}(s)\times\overline{e}(s+\Delta s))^2}}$$

计算。

当$\overline{e}=\overline{\alpha}$时，

$$d_1=\frac{|(\Delta\overline{r},\ \overline{\alpha}(s),\ \overline{\alpha}(s+\Delta s)|}{\sqrt{(\overline{\alpha}(s)\times\overline{\alpha}(s+\Delta s))^2}}$$

$$=\frac{|(\Delta\overline{r},\ \overline{\alpha},\ \Delta\overline{\alpha})|}{\sqrt{(\overline{\alpha}\times\Delta\overline{\alpha})^2}},$$

$$\Delta\overline{r}=\overline{\alpha}\Delta s+\frac{1}{2}\kappa\overline{\beta}\Delta s^2+\frac{1}{6}(\kappa\tau\overline{\gamma}+\kappa\dot{\kappa}\overline{\beta}$$

$$-\kappa^2\overline{\alpha})\Delta s^3+\cdots,$$

$$\Delta\overline{\alpha}=\kappa\overline{\beta}\Delta s+\cdots,$$

故得： $d_1=\frac{\Delta s^3}{6}\kappa\tau+\cdots$；

若 $k\tau\neq 0$，则 d_1 为三阶无穷小。类似可求得，d_2 和 d_3 是一阶无穷小。

520. 如果螺距等于园柱的园周长。

522. $R=(e^t+e^{-t})^2\sqrt{\frac{1}{2}+(e^t-e^{-t})^2}$。

523. $R=3\sqrt{2}\,e^t$

526. 园柱螺线。它的螺距等于原园柱螺线的螺距，并位于 Oz 为轴和半径为 $\frac{b^2}{a}$ 的园柱上。

528. $x=f(u)\cos v$，$y=f(u)\sin v$，$z=g(u)$（图171）。

529. $x=(a+b\cos u)\cos v$，$y=(a+b\cos u)\sin v$，$z=b\sin u$（图172）。

530. $x=a\,\mathrm{ch}(u/a)\cos v$，$y=a\,\mathrm{ch}(u/a)\sin v$，$z=u$（图173）。

531. $x=a\sin u\cos v$，$y=a\sin u\sin v$

$z=a(\ln\mathrm{tg}(\frac{u}{2})+\cos u)$（图174）。

532. 写出两族直母线的方程，并用它们表示 x， y， z，得。

$x=a(u+v)$， $y=b(v-u)$， $z=2uv$

（图175）

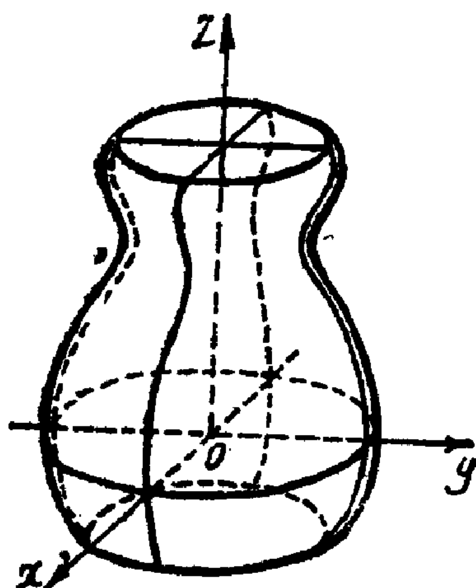


图 171

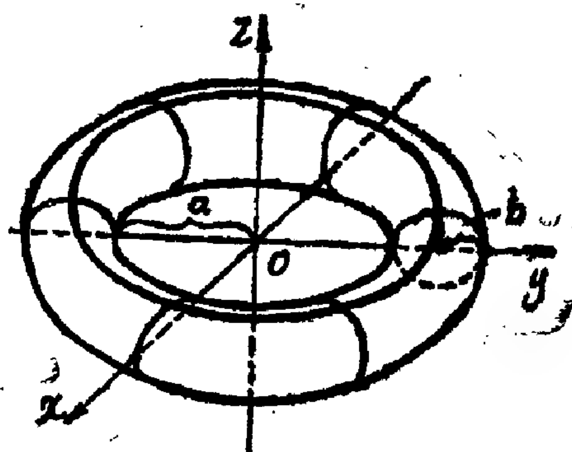


图 172

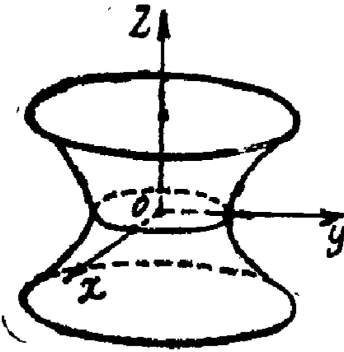


图 173

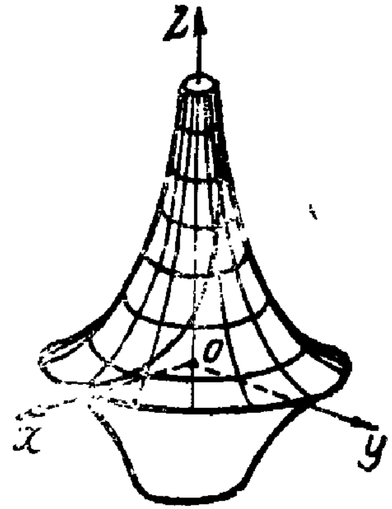


图 174

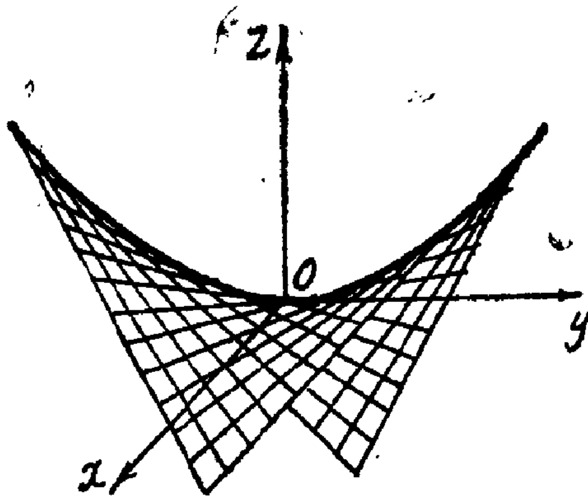


图 175

曲面 $z = pxy$ 的参数方程为：

$x = u$，$y = v$，$z = puv$。

533. $x = f(u)$，$y = \varphi(u)$，$z = v$。

534. $x = a\,\mathrm{ch}\,u$，$y = b\,\mathrm{sh}\,u$，$z = v$——双曲柱面（参看图12）。

$x=u$，$y=u^2$，$z=v$——抛物柱面（参看图11。）

535．$\overline{r}=\overline{\rho}(u)+v\overline{e}$。

536．$x=u+v$，$y=u^2+2v$，$z=u^3+3v$。

537．曲面的参数方程为：

$x=\cos u-v$，$y=\sin u+3v$，$z=-2v$，

故得：$(x-\frac{z}{2})^2+(y+\frac{3}{2}z)^2=1$。

538．提示：如果准线由方程

$X=X(t)$，$Y=Y(t)$，$Z=Z(t)$，

给出，则柱面的参数方程将为：

$x=X(t)+\lambda l$，$y=Y(t)+\lambda m$，$z=Z(t)+\lambda n$。

由此消去λ和t，得方程为

$f(nx-lz,\ ny-mz)=0$。

539．$(nx-lz)^2+(ny-mz)^2=an(ny-mz)$。

540．2)例如：$x=v^2+1$，$y=v^2-1$，$z=2v$；

3) $\frac{x-16}{3}=\frac{y-12}{2}=\frac{z-4}{-1}$。

541．$x-a=v[f(u)-a]$，$y-b=v[\varphi(u)-b]$，$z-c=v[\psi(u)-c]$

从这些方程中消去参数u和v，得方程为：

$F(\frac{x-a}{z-c},\ \frac{y-b}{z-c})=0$。

542．$(bz-cy)^2=2p(z-c)(az-cx)$。

543．$(x+1)^2=2y^2+z^2$。

544．A在曲面上，B不在。

545．椭园柱面。

546. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$——椭圆面。

547. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$。

548. u——点到锥面顶点的距离，v——曲线的弧长。曲线上所有点离顶点的距离为1。

549. 两族平行直线（图176）。

550. 由坐标原点引出的射线族和圆心在坐标原点的同心园族（图177）。

551. 曲线 v = 常数——共焦点的椭园族和 Ox 轴上的线段〔−1，1〕；曲线 u = 常数——共焦点的双曲线族和 Ox 轴上区间〕−∞，1〕和〔1，∞〔（图178）。

552. 直母线。

553. 1) $x=a\cos(u+v)$，$y=a\sin(u+v)$，$z=bu$；

2) $x=a\cos u$，$y=a\sin u$，$z=bu+v$；

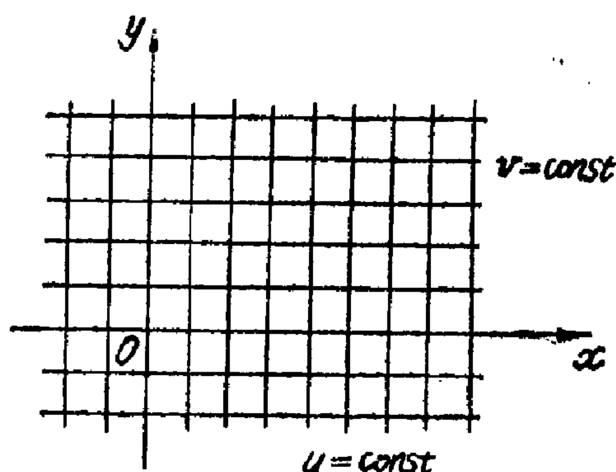


图 176

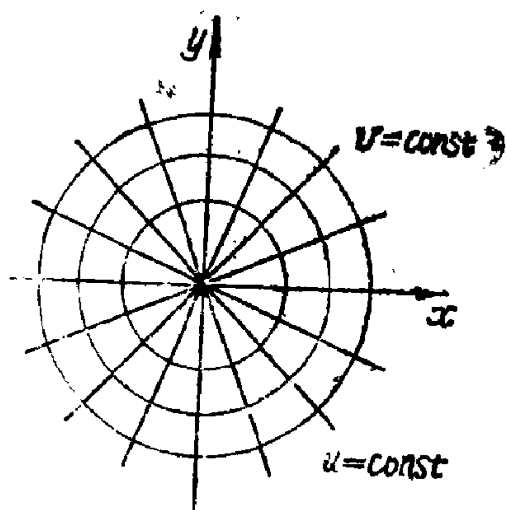


图 177

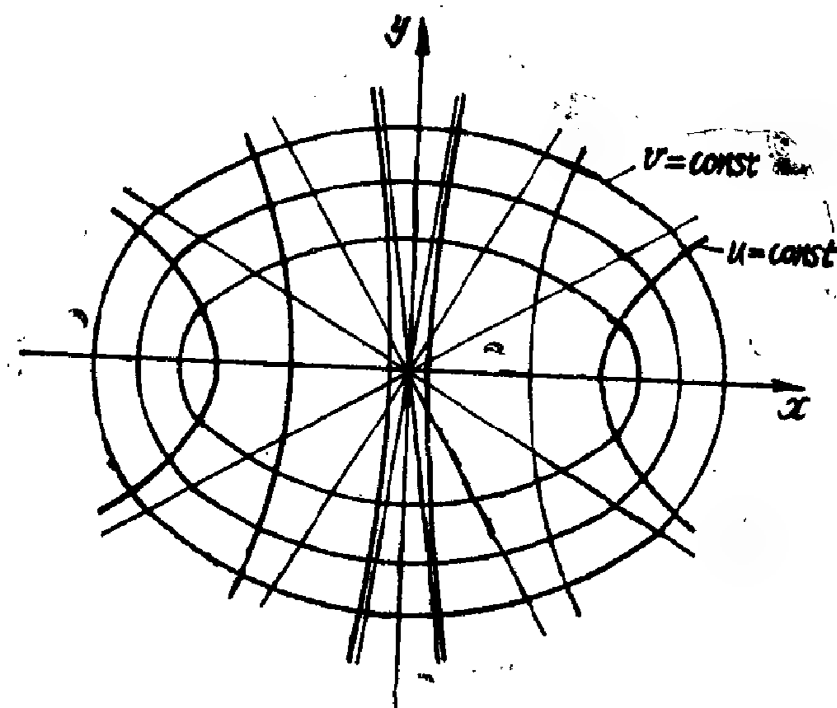


图 178

3) $x = a\cos(u+v)$，$y = a\sin(u+v)$，$z = b(u-v)$。

554. $\overline{r} = \overline{\rho}(u) + v\overline{\rho}'(u)$。

555. 图形的方程：

$$x = a(\cos u - v\sin u), \quad y = a(\sin u + v\cos u),$$

$z = b(u + v)$。

不是。然而，如果从图形中去掉原柱面螺线的点，则得到的是曲面。

556. 如果取Oz轴为旋转轴，则一般螺面的方程将为：

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(u) + av,$$

其中，u ——螺面上点M到轴的距离$|MK|$；v ——从xOz平面起算的母线平面的旋转角；a ——常数，是移动速度与角速度之比（图179）。

557. $x = u\cos v$，$y = u\sin v$，$z = av$ ——正螺面（图180）。$x = u\cos v$，$y = u\sin v$，$z = mu + av$ ——斜螺面（图181）。

558. $x = a(1 - u)\cos v$，$y = (1 - u)\sin v$，$z = av$ ——正螺面。

559. $x = u\cos v$，$y = u\sin v$，$z = f(v)$

其中，如果$f(v) = av + b$，则得到正螺面。

560. $z(x^2 + y^2) = 2axy$。

561. $x = u\cos v$，$y = u\sin v$，$z = \dfrac{a}{\cos v}$

562. $$\bar{r} = \bar{\rho}(s) + a\left(\frac{\ddot{\rho}}{|\ddot{\rho}|}\cos\alpha + \frac{\dot{\rho} \times \ddot{\rho}}{|\dot{\rho} \times \ddot{\rho}|}\sin\alpha\right)$$

其中α为曲线主法线和在管状曲面任意点动园半径间的夹角。

565. 按公式，$u = c\cos\dfrac{\varphi - \psi}{2}$，$v = \dfrac{\varphi + \psi}{2}$，

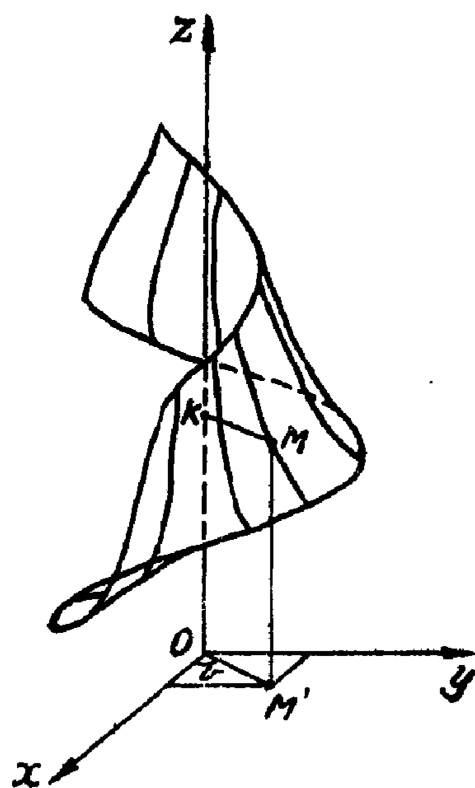


图 179

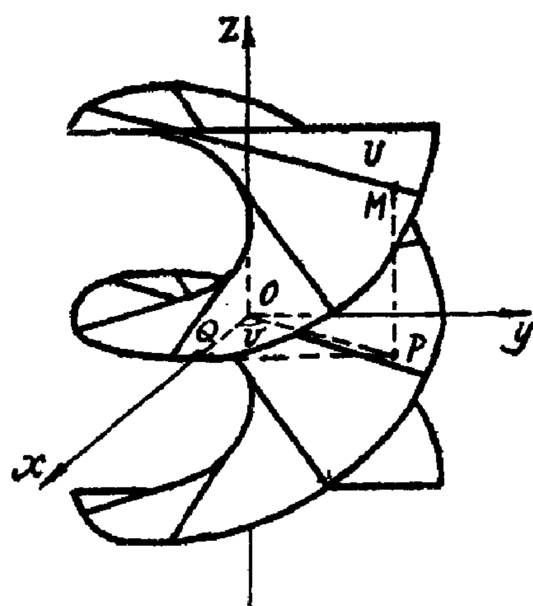


图 180

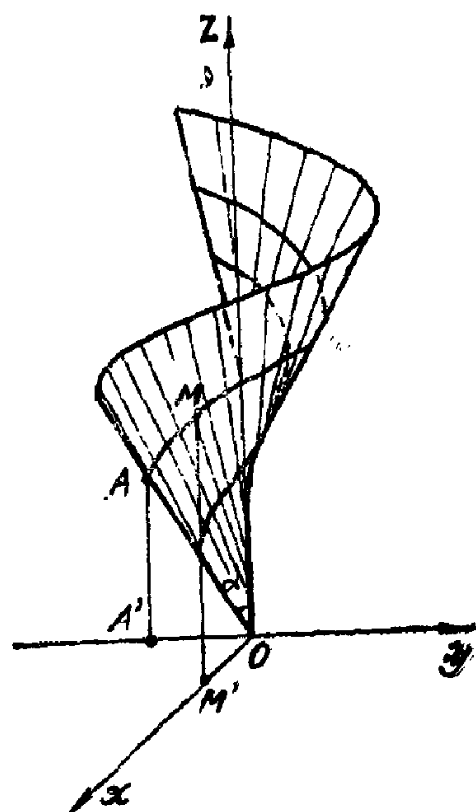


图　181

$0 \leqslant \varphi - \psi < \frac{\pi}{2}$，引入新参数φ和ψ置换u和v，并将这些值代入正螺面的矢方程

$$\overline{r} = u\ (\cos v\ \overline{i} + \sin v\ \overline{j}) + a v \overline{k}。$$

设$\overline{\rho}(t) = c(\cos t\ \overline{i} + \sin t\ \overline{j}) + a t \overline{k}$，

得正螺面的方程为：$\overline{r} = \frac{1}{2}\overline{\rho}(\varphi) + \frac{1}{2}\overline{\rho}(\psi)$。

566. 抛物面方程 $\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z$

可写为：$\overline{r} = (u\ \overline{i} + \frac{u^2}{2p}\overline{k}) + (v\ \overline{j} \pm \frac{v^2}{2q}\overline{k})$ 。

567. 设$M_0(x_0、y_0、z_0)$是二次曲面 f（x、y、

$z)=0$上的某一点，过点M_0的任一直线：

$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=\frac{z-z_0}{1}$交此曲面于点M，点M的z坐标由二次方程

$$f(x_0+u(z-z_0),\ y_0+v(z-z_0),\ z)=0$$

确定。根据假设，这个方程有一根为z_0，故第二个根（点M的坐标）将可用u和v的有理函数表示，从而证明了结论。

569. 1）切线：$y=0,\ z=\lambda$和$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-\lambda}{\lambda}$

法平面：$x-1=0$，$(x-1)+y+\lambda(z-\lambda)=0$

2）$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2+\lambda^2}}$。

571. $18x+3y-4z-41=0$。

572. $3x-y-2z-4=0$；$\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}$

$=\frac{z-2}{-2}$。

573. $6x+3y-2z-7=0$；$\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{3}$

$=\frac{z-4}{-2}$。

574. $x+y-\sqrt{2}z=0$；法线

$\frac{x-\sqrt{2}}{1}=\frac{y-\sqrt{2}}{1}=\frac{z-2}{-\sqrt{2}}$；

曲线$u=2$的切线：$x+y=2\sqrt{2}$，$z=2$。

575. $3x+12y-z-18=0$；$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{12}$

$$=\frac{z-9}{-1}。$$

576. $3x+4y+12z-169=0$; $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$。

577. $3x-2y+3z-4=0$; $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$。

578. $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$;

$x=x_0(1+\frac{t}{a^2})$, $y=y_0(1+\frac{t}{b^2})$,

$z=z_0(1+\frac{t}{c^2})$。

579. $x\cos u\cos v+y\cos u\sin v-z\sin u$

$+a(\ln\operatorname{tg}(\frac{u}{2}))\sin u=0$。

580. $xa\sin v-ya\cos v+zu-auv=0$;

$$\frac{x-u\cos v}{a\sin v}=\frac{y-u\sin v}{-a\cos v}=\frac{z-av}{u}。$$

沿曲线$u=u_0$法线与O z 轴夹定角。沿曲线$v=v_0$法线平行固定平面。

581. $12x+9y+20z-230=0$。

582. $x+y+z-3=0$。

586. 点的曲线坐标由方程

$\operatorname{tg}u=\pm C/\sqrt{A^2+B^2}$, $\operatorname{tg}v=B/A$给出。

593. $((\bar{R}-\bar{r}(s)), \dot{\bar{r}}(s), \ddot{\bar{r}}(s))=0$。

沿母线 $s=s_0$ 切平面不变，它与曲线 $\overline{r}=\overline{r}(s)$ 在 $s=s_0$ 处的密切平面重合。

598. 切平面方程能写为：

$$f'(c)(x\sin c-y\cos c)-u[ax\cos c+ay\sin c-z+f(c)]=0,$$

故得，所有平面均过直线：

$$y=x\operatorname{tg}c,\quad ax\cos c+ay\sin c-z+f(c)=0。$$

599. 取法线的交点为径矢的始点，那么

$$\overline{r}\cdot\partial_u\overline{r}=0\qquad \overline{r}\cdot\partial_v\overline{r}=0$$

故得 $\overline{r}^2=$ 常数

601. 如果 $\overline{a}$ 为已知直线的方向矢量，并取径矢的始点在此直线上，则矢量 $\overline{r}$、$\overline{a}$ 和 $\partial_u\overline{r}\times\partial_v\overline{r}$ 位于同一平面上，且

$$\overline{r}\cdot(\overline{a}\times(\partial_u\overline{r}\times\partial_v\overline{r}))=0。$$

按二重矢积法则得到：

$$(\overline{r}\cdot\partial_u\overline{r})(\overline{a}\cdot\partial_v\overline{r})-(\overline{r}\cdot\partial_v\overline{r})(\overline{a}\cdot\partial_u\overline{r})=0$$

但这能写为函数行列式等于零的形式：

$$\partial_u\overline{r}^2\partial_v(\overline{a}\cdot\overline{r})-\partial_v\overline{r}^2\partial_u(\overline{a}\cdot\overline{r})=0。$$

故在数值 $\overline{r}^2$ 和 $\overline{a}\cdot\overline{r}$ 间存在函数关系：

$$\overline{r}^2=f(\overline{a}\cdot\overline{r})。$$

取 Oz 轴沿矢量 $\overline{a}$ 方向，得

$$x^2+y^2=f(z)$$——旋转曲面。

605. 设 $\overline{R}=\overline{r}(s)+u\overline{\alpha}(s)$ 为曲面方程，且 $\overline{r}(s)$

为脊线。则有

$$\partial_s \overline{R} = \overline{\alpha} + u\kappa\overline{\beta},\ \partial_u \overline{R} = \overline{\alpha}。$$

曲面的法线矢量。$\overline{N} = \partial_s \overline{R} \times \partial_u \overline{R} = u\kappa(\overline{\beta} \times \overline{\alpha})$ 的方向沿曲线$\overline{r}(s)$的付法线方向，这就是需要证明的。

606. 必要性：设$\overline{a}$是垂直于准平面的矢量，则$\overline{e} \cdot \overline{a} = 0$。故$\overline{e}' \cdot \overline{a} = 0$，$\overline{e}'' \cdot \overline{a} = 0$，

因此：$(\overline{e}, \overline{e}', \overline{e}'') = 0$。

若$\overline{e}'' = \overline{0}$，则$\overline{e}'$是定矢，但$\overline{e} \cdot \overline{e}' = 0$，$\overline{e} \cdot \overline{a} = 0$，则$\overline{e}$是常矢，曲面退化为柱面。

充分性：设$(\overline{e}, \overline{e}', \overline{e}'') = 0$，$\overline{e}'' \neq \overline{0}$，

则矢量$\overline{c} = (\overline{e} \times \overline{e}')/|\overline{e}'|$为定矢，因为$\overline{c}' = \overline{0}$。矢量$\overline{e}$与定矢$\overline{c}$垂直，即平行固定平面。

607. 正螺面的轴。

608. 曲面的最小纬线。

609. 原曲线。

610. $\overline{R} = \overline{r} + \dfrac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}\overline{\beta}$，其中$\kappa$是原曲线的曲率，$\tau$是它的挠率。

611. 取腰曲线为斜直纹面$\overline{R} = \overline{r}(s) + u\overline{e}(s)$的准线，则$\overline{\alpha} \cdot \overline{e}' = 0$。沿确定母线的法线矢量为$\overline{\alpha}_0 \times \overline{e}_0 + u(\overline{e}_0' \times \overline{e}_0)$；因此由原曲面法线形成的曲面方程能写为：

$$\overline{R}=\overline{r}_0+u\,\overline{e}_0+v(\overline{\alpha}_0\times\overline{e}_0+u\,(\overline{e}_0'\times\overline{e}_0))。$$

矢量$\overline{e}_0$,$\overline{\alpha}_0\times\overline{e}_0$;$\overline{e}_0'\times\overline{e}_0$彼此正交。选取直角坐标系，使原点在点$\overline{r}_0$,而坐标轴方向与所指出的矢量方向重合，那么得到的曲面方程为

$$x=u,\quad y=av,\quad z=buv,$$

或 $z=\dfrac{b}{a}xy$。

这是双曲抛物面，它的顶点是点$\overline{r}_0$,即位于腰曲线上。

612. 把曲线的方程写为参数式

$$x=t/(t^2-1),\quad y=1/(t^2-1),\quad z=t,$$

得到 $\Phi(t)=t^3(t^2-2)/(t^2-1)^2$。

613. $\Phi(t)$值对于t来说是二阶无穷小，因此是一阶切触。

615. 设曲线方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$;

$$\Phi(t)=\begin{vmatrix} x(t)-x(t_0) & y(t)-y(t_0) & z(t)-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}$$

将差$x(t)-x(t_0)$, $y(t)-y(t_0)$, $z(t)-z(t_0)$按台劳公式写出，且在$\Phi(t)$的表示式中$(t-t_0)^3$的系数为零，得到:

$$\begin{vmatrix} x'''(t_0) & y'''(t_0) & z'''(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0。$$

因此，曲线的挠率等于零。

617. $x^2+y^2=1$ ——圆柱面

618. $xy+yz=1$ ——双曲柱面

619. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0$——不包含顶点的锥面。

620. 例如，$(x-C)^2+y^2=C^2$，$C\neq 0$。

621. 例如，$(x-C)^2+y^2+z^2=C^2$，$C\neq 0$。

622. 包络是圆柱面 $y^2+z^2=1$；特征线是圆 $y^2+z^2=1$，$x-C=0$；脊线不存在。

623. 对于建立在平行Oy轴的弦上的球面有

$$\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1。$$

当 $|\operatorname{tg}\varphi|\geqslant\frac{b}{a}$ 时，椭圆面包络球面，其中 φ 为椭圆方程

$x=a\cos\varphi$，$y=b\sin\varphi$ 的参数。

对于建立在平行Ox轴的弦上的球面有

$$\frac{y^2}{a^2+b^2}+\frac{x^2+z^2}{a^2}=1，|\operatorname{tg}\varphi|\leqslant\frac{b}{a}。$$

对于双曲线 $x=a\operatorname{ch}\varphi$，$y=b\operatorname{sh}\varphi$ 得到：

1）如果弦平行Oy轴，则在 $b\geqslant a$ 时包络不存在，在 $b<a$ 时包络方程为 $\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$。

当 $|\operatorname{tg}\varphi|\leqslant\frac{b}{a}$ 时，它包络球面。

2）如果弦平行Ox轴，则在 $b\neq a$ 时包络方程为

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1。$$

如果 $b>a$，它包络所有球面，在 $b<a$ 时包络

$|\operatorname{tg}\varphi|\leqslant\frac{b}{a}$ 的球面。如果 $b=a$，包络是平面 $y=0$（对照308、309题）。

624．圆柱螺线：$x=b\cos\alpha$，$y=b\sin\alpha$，$z=b\alpha$

625．$xyz=\frac{2}{9}V$。

626．$x^2+y^2+(z-C)^2=\frac{a^2C^2}{a^2+1}$

提示，球面由在 xOz 平面内，与直线 $x=\pm az$ 相切且圆心在 Oz 轴上的圆旋转而成。

627．族的方程：$(\overline{R}-\overline{\rho}(s))^2=a^2$。

关于 s 微分，得到：$(\overline{R}-\overline{\rho})\cdot\overline{\alpha}=0$，

由此 $\overline{R}-\overline{\rho}=\lambda\overline{\gamma}+\mu\overline{\beta}$，$\lambda^2+\mu^2=a^2$

设：$\lambda=a\cos\alpha$，$\mu=a\sin\alpha$

得到包络方程为 $\overline{R}=\overline{\rho}+a(\overline{\gamma}\cos\alpha+\overline{\beta}\sin\alpha)$。

628．族的方程：

$$(x-b\cos\varphi)^2+(y-b\sin\varphi)^2+z^2-a^2=0。$$

判别曲面的方程：

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2-4b^2(x^2+y^2)=0。$$

脊线在 $a>b$ 时，缩为两个点 $(0,0,\pm\sqrt{a^2-b^2})$，在 $a=b$ 时，缩为一个点 $(0,0,0)$。

629．包络

$$[(y-R)^2+z^2-R^2][(y+R)^2+z^2-R^2]=0$$

是两个柱面。脊线没有（图182）。

630．判别曲面由方程组：

$$\left.\begin{aligned}(R-\overline{r}(s))\cdot\overline{\gamma}(s)&=0,\\(R-\overline{r}(s))\cdot\overline{\beta}(s)&=0。\end{aligned}\right\}$$

确定，已知曲线的切线是特征线，脊线是已知曲线。

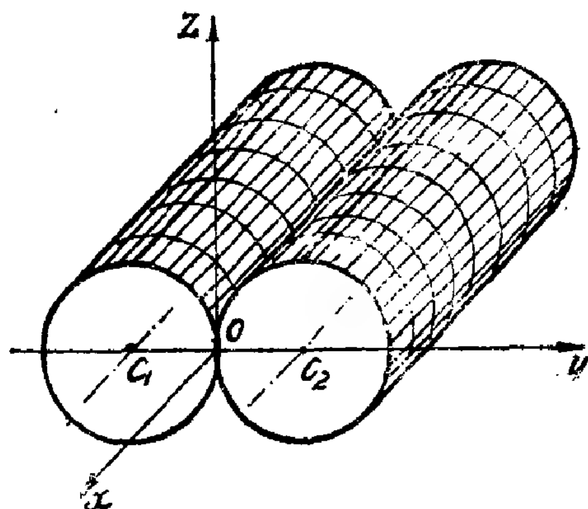


图182

631. 判别曲面由方程组

$$\left.\begin{aligned}&(\overline{R}-\overline{r}(s))\cdot\overline{\alpha}(s)=0,\\&(\overline{R}-\overline{r}(s))\cdot\overline{\beta}(s)\kappa(s)-1=0。\end{aligned}\right\}$$

确定。特征线与付法线平行且过曲线的曲率中心。脊线

$$\overline{R}=\overline{r}+\frac{1}{\kappa}\overline{\beta}+\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\overline{\gamma}$$

是由曲线的密切球心组成。

632. 判别曲面由方程组

$$\left.\begin{aligned}&(\overline{R}-\overline{r}(s))\cdot\overline{\beta}(s)=0\\&(\overline{R}-\overline{r}(s))\cdot(\tau(s)\overline{\gamma}(s)-\kappa(s)\overline{\alpha}(s))=0\end{aligned}\right\}$$

确定，特征线指向沿达布矢（参看477题）。

脊线 $\overline{R}=\overline{r}+\dfrac{\kappa\tau}{\kappa\tau'-\kappa'\tau}\overline{\alpha}+\dfrac{\kappa^2}{\kappa\tau'-\kappa'\tau}\overline{\gamma}$。

633. 以Ox为轴的锥面方程：$-x^2\mathrm{tg}^2\alpha+y^2+z^2$

$=0$。绕Oy轴旋转α角得到：

$-(x\cos\alpha+z\sin\alpha)^2\operatorname{tg}^2\alpha+(-x\sin\alpha+z\cos\alpha)^2+y^2=0$，或者

$$y^2\cos^2\alpha+z^2\cos2\alpha-xz\sin2\alpha=0。$$

将这个锥面绕Oz轴旋转β角（β是族的参数）：

$$-(x\sin\beta+y\cos\beta)^2\cos^2\alpha+z^2\cos2\alpha-z(x\cos\beta+y\sin\beta)\sin2\alpha=0。\qquad(*)$$

将等式(*)对β微分得到

$$(-x\sin\beta+y\cos\beta)(x\cos\alpha\cos\beta+y\cos\alpha\sin\beta+z\sin\alpha)=0。$$

平面 $x\cos\alpha\cos\beta+y\cos\alpha\sin\beta+z\sin\alpha=0$

垂直于锥面的轴且与锥面仅有一个公共点。

由方程 $-x\sin\beta+y\cos\beta=0$与族的方程(*)消去β，得到包络方程 $z(z\cos2\alpha-\sqrt{x^2+y^2}\sin2\alpha)=0$。因此，平面$z=0$和锥面$x^2+y^2-z^2\operatorname{ctg}^2 2\alpha=0$组成曲面的包络。

635．观察已知曲面σ的一条直母线l，在它的所有点上σ的切平面π是同一个，在直母线l的点上作平行平面族截σ的所有截线的切线。显然，所有这些切线将彼此平行。但那样的话，这些平面截线在它与直母线l的交点处的法线将彼此平行，即它们将位于同一个平面π^*内，因此，平面截线的渐缩线所在的曲面是平面族π^*的包络，即也是可展曲面。

636．$z=a$，$z=-a$

637．在曲面上取任意曲线Γ，并在曲线的每个点上作切平面，那么曲面可看作这些平面族的包络，因为根据条件

平面族的每一个平面都与已知曲面沿曲线相切。另方面，这些切平面形成一个单参数（曲线Γ的弧长 s ）的族，因此包络只能是可展曲面，即这些切触曲线是直线。

638. 设$M_i(x_i\ y_i\ z_i)(i=1, 2, \cdots, n)$是已知点。将平面方程取为法线式：

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

点M_i到平面的距离为

$$b_i = x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma - p。$$

由题目条件

$$\cos\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i + \cos\beta\sum_{i=1}^{n} y_i + \cos\gamma\sum_{i=1}^{n} z_i - np = b =$$

常数。

将这个关系式写为

$$\cos\alpha\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \cos\beta\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} + \cos\gamma\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} - p = \frac{b}{n},$$

这个条件表示了这样一个事实，具有坐标

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},\quad \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n},\quad \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}$$

的点距离族的所有平面有同样的距离，因此，包络是球心在此点的球。

639. $ds^2 = (f'^2 + g'^2)du^2 + f^2dv^2$。

640. $ds^2 = R^2(du^2 + \cos^2 u dv^2)$。

641. $ds^2 = (a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u)du^2 + a^2\cos^2 u dv^2$。

642. $ds^2 = (a^2\operatorname{sh}^2 u + c^2\operatorname{ch}^2 u)du^2 + a^2\operatorname{ch}^2 u dv^2$。

643. $ds^2=(a^2ch^2u+c^2sh^2u)du^2+a^2sh^2udv^2$。

644. $ds^2=(1+4u^2)du^2+u^2dv^2$。

645. $ds^2=du^2+R^2dv^2$。

646. $ds^2=(1+k^2)du^2+u^2dv^2$。

647. $ds^2=b^2du^2+(a+b\cos u)^2dv^2$。

648. $ds^2=ch^2\left(\frac{u}{a}\right)du^2+a^2ch^2\left(\frac{u}{a}\right)dv^2$。

649. $ds^2=a^2ctg^2u\,du^2+a^2\sin^2u\,dv^2$。

650. $ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$。

651. $ds^2=[1+f'^2(u)]du^2+2af'(u)dudv+(a^2+u^2)dv^2$。

652. 1)对于由曲线$\overline{r}=\overline{r}(u)$的切线形成的曲面$\overline{R}=\overline{r}(u)+v\overline{\alpha}(u)$,

$ds^2=(1+\kappa^2v^2)du^2+2dudv+dv^2$,

其中κ是已知曲线的曲率。

2)对于主法线形成的曲面$\overline{R}=\overline{r}(u)+v\overline{\beta}(u)$,

$ds^2=[(1-\kappa v)^2+\tau^2v^2]du^2+dv^2$

3)对于副法线形成的曲面$\overline{R}=\overline{r}(u)+v\overline{\gamma}(u)$,

$ds^2=(1+\tau^2v^2)du^2+dv^2$,

其中τ是曲线$\overline{r}=\overline{r}(u)$的挠率。

653. $ds^2=(1+p^2)dx^2+2pqdxdy+)1+q^2)dy^2$,其中,$p=\partial_xz$,$q=\partial_yz$。

654. 在1),2),4)的情况下。

655.

$$E'=\frac{1}{J^2}[E(\partial_vv')^2-2F\partial_uv'\partial_vv'+G(\partial_vv')^2],$$

$$G' = \frac{1}{J^2}[E(\partial_u u')^2 - 2F\partial_u u'\partial_v u' + G(\partial_u u')^2],$$

$$F' = \frac{1}{J^2}[-E\partial_v u'\partial_v v' + F(\partial_u u'\partial_v v' + \partial_v u'\partial_u v') - G\partial_u u'\partial_u v'],$$

$$H' = \frac{H}{|J|},$$

其中 $J = \frac{D(u', v')}{D(u, v)} \neq 0$，

658．曲线坐标为坐标曲线的弧长，坐标网是切比雪夫网。

659．球面：$ds^2 = d\tilde{u}^2 + R\cos^2(\tilde{u}/R)\,d\tilde{v}^2$。

环面：$ds^2 = d\tilde{u}^2 + (a + b\cos(\tilde{u}/b))^2 d\tilde{v}^2$。

悬链面：$ds^2 = d\tilde{u}^2 + (a^2 + \tilde{u}^2)d\tilde{v}^2$。

伪球面：$ds^2 = d\tilde{u}^2 + e^{-2\bar{u}/a}d\tilde{v}^2$。

提示：$\bar{u}$ 是经线的自然参数。

660．$ds^2 = d\tilde{u}^2 + e^{-2\tilde{u}/a}d\tilde{v}^2$。

设：$u^* = \tilde{v}$　　$v^* = ae^{\tilde{u}/a}$ 得到

$$ds^2 = \frac{a^2}{v^{*2}}(du^{*2} + dv^{*2})。$$

661．$\cos\varphi = \frac{a^2xy}{\sqrt{1+a^2x^2}\sqrt{1+a^2y^2}}$。

663．取曲面的第一二次形式为：

$$ds^2 = du^2 + G(u)dv^2。$$

则 $\cos\alpha = \dfrac{du}{\sqrt{du^2 + G(u)dv^2}}$,

故得 $v\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \pm\int_{u_0}^{u} \dfrac{du}{\sqrt{G(u)}}$。

664. 取球面的第一二次形式为:

$$ds^2 = du^2 + R\cos^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2。$$

得

$$v\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \pm\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2R}\right)。$$

666. 锥面方程写为 $\overline{r} = v\overline{e}(u)$, $|\overline{e}(u)| = 1$,得到

$$\mathrm{tg}\,\alpha\ln u = \int|\overline{e}'(u)|du + C。$$

667. 若曲面方程取为652题所指出的形式,得到 $u + v$ = 常数。

668. 把曲面S的第一二次形式写为

$$ds^2 = (1 + \kappa^2 v^2)du^2 + 2dudv + dv^2,$$

得到

$$(\sin^2\alpha - \kappa^2 v^2\cos^2\alpha)du^2 + 2\sin^2\alpha\,dudv + \sin^2\alpha\,dv^2 = 0。$$

669. $(E\partial_{\cdot}\varphi - F\partial\ \varphi)du + (F\partial_v\varphi - G\partial_u\varphi)dv = 0$

670. $v - \mathrm{tg}\,u$ = 常数。

671. $u^2 + u + 1 = C_1 e^{-}$ (C_1 = 常数)。

672. $v = \dfrac{1}{2u^2} + \lambda$。

673. $X = \dfrac{U - V}{2}\cos V$, $Y = \dfrac{U - V}{2}\sin V$, $z = \dfrac{U + V}{2}$

其中 $U = 2u + v$ $V = v$。

674. $ER - FQ + GP = 0$。

676. $(1+a^2x^2)y^2=C_1$，$(1+a^2y^2)x^2=C_2$。

678. $\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})\pm v=$常数。

679. $u\pm\ln\operatorname{tg}(v/2)=$常数。

680. $$\left.\begin{aligned}&ay+\sqrt{1+a^2y^2}=C\,(ax+\sqrt{1+a^2x^2}),\\&z=axy。\end{aligned}\right\}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&ay+\sqrt{1+a^2y^2}=\frac{C_1}{\sqrt{1+a^2x^2}+ax},\\&z=axy。\end{aligned}\right\}$$

681.

1) $ds^2=(8u^2+v^2)du^2+2uvdudv+(8v^2+u^2)dv^2$；

2) $ds=2\sqrt{2v^2+1}\,dv$，$ds=\sqrt{8u^2+1}\,du$；

$ds=2\sqrt{2a^4+a^2+2}\,u\,du$；

3) $s=3\sqrt{2a^4+a^2+2}$。

682. $\cos\alpha=\pm(1-a^2)/(1+a^2)$。

683. $p=\frac{10}{3}a$；$\cos\alpha=1$，$\cos\beta=\frac{2}{3}$，

$\cos\gamma=\frac{2}{3}$。

684. $s=|\operatorname{sh}u_2-\operatorname{sh}u_1|$。

685. $\cos\alpha=-3/5$。

686. $\cos\alpha=2/3$。

687. $s=\sqrt{2}\,|u_2-u_1|$。

688. $ds^2=a^2\operatorname{ctg}^2u\,du^2+a^2\sin^2u\frac{du^2}{\sin^2u}=\frac{a^2du^2}{\sin^2u}$

$$s=a\left|\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\sin u}\right|=a\left|\ln\operatorname{tg}\frac{u_2}{2}-\ln\operatorname{tg}\frac{u_1}{2}\right|$$

$=a|v_2-v_1|$。观察曲线族

$v=a\ln\operatorname{tg}(u/2)+C$。

点$M_1(u_1, v_1)$位于曲线

$$v=-a\ln tg(u/2)+C_1$$

上，而点$M_2(u_2, v_2)$在曲线

$$v=-a\ln tg(u/2)+C_2$$

上，即 $v_1=-a\ln tg(u_1/2)+C_1$,

$v_1=a\ln tg(u_1/2)+C$,

$v_2=-a\ln tg(u_2/2)+C_2$,

$v_2=a\ln tg(u_2/2)+C$;

就是 $v_1=\dfrac{C_1+C}{2}$, $v_2=\dfrac{C_2+C}{2}$;

因此 $s=a|v_2-v_1|=\dfrac{a|C_2-C_1|}{2}$,

即与C无关。

689. 1)取球面方程为

$x=R\cos u\cos v$, $y=R\cos u\sin v$, $z=R\sin u$。

置一直角边在曲线$u=0$上，另一直角边在曲线$v=\alpha$上，一个顶点在点$B(u=0, v=0)$，第二个顶点在点A $(u=\beta, v=\alpha)$ （图183）。那么，直角边的长分别为

$a=R\alpha$, $b=R\beta$。要计算c应该求（在球面上的）曲线

$$Ay+Bz=0$$

在所示两点间的弧长。在曲线坐标中斜边的方程为：

$$A\cos u\sin v+B\sin u=0。$$

因为它过点$(u=\beta, v=\alpha)$，那么

$$\sin v=k\,tg\,u,$$

其中 $k=\dfrac{\sin\alpha}{tg\beta}$,

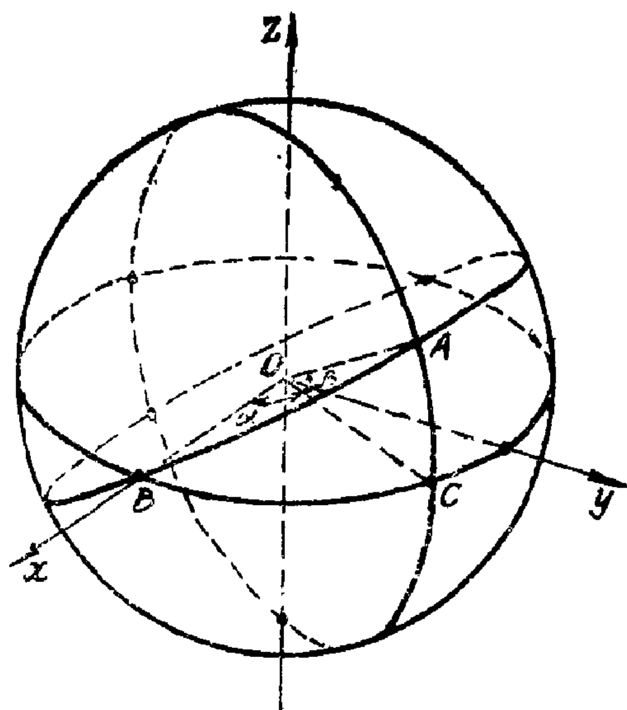


图183

$$c = s = R\sqrt{1+k^2}\int_0^{\beta}\frac{\cos u\,du}{\sqrt{1-(1+k^2)\sin^2 u}}$$

$$= R\arcsin(\sqrt{1+k^2}\sin\beta)$$

$$= R\arcsin\sqrt{1-\cos\alpha^2\cos^2\beta}\ ,$$

故得 $\cos(c/R) = \cos\alpha\cos\beta = \cos(a/R)\cos(b/R)$

2) $S = R^2\iint\limits_D \cos u\,du\,dv = R^2\int_0^{\alpha} dv\int_0^{f(v)}\cos u\,du,$

其中 $f(v) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin v}{k},$

$$S = R^2\int_0^{\alpha}\sin\operatorname{arctg}\frac{\sin v}{k}\,dv$$

$$= R^2 \int_0^{\alpha} \frac{\sin v \, d v}{\sqrt{(1+k^2)-\cos^2 v}}$$

$$= R^2 \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \arcsin \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+k^2}}\right) 。$$

故得

$$\sin \frac{S}{R^2} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + k^2} - k\cos\alpha}{1+k^2}$$

$$= \frac{\sin\alpha \sin\beta}{1+\cos\gamma} = \frac{\sin(a/R)\sin(c/R)}{1+\cos(c/R)}$$

利用关系式

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma},$$

得到

$$\sin B = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

$$\cos(A+B) = -\frac{\sin\alpha \sin\beta}{1+\cos\gamma},$$

$$\sin\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{1+\cos\gamma}。$$

与前述比较，得：

$$S = R^2\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right) 。$$

690. $S = \frac{a^2}{2}[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$。

691. $S = a^2 [\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2})]$。

692. $S = 2a^2(\pi - 2)$，其中a是球半径。

693. $S = 2\varphi_0 R^2$，其中R是球半径。

695. 提示：取锥面方程为$\overline{r} = v\,\overline{e}(u)$，其中$|\overline{e}(u)|$

$=1$。将它的第一二次形式与平面在极坐标中的第一二次形式作比较。

696．如652题证明的，这个曲面的第一二次形式能写为

$$ds^2=[1-v^2\kappa^2(u)]du^2+2dudv+dv^2$$

其中 $\kappa(u)$是曲线L的曲率。

对曲线L作没有伸缩的变形，使曲线在它的每个点的曲率保持不变。因为在ds^2的表示式中没有曲线的挠率，因此曲线L的切线曲面的相应变形将使原曲面贴合在变形曲面上。将曲线L变为平面曲线，因而我们将切线曲面贴合到平面上。

697．正螺面

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=av$$

的第一二次形式为

$$ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2。\qquad (*)$$

设悬链面是由悬链线

$$x=a\,\mathrm{ch}(z/a),\quad y=0$$

绕Oz轴旋转而成，悬链线的参数方程能表为

$$x=\sqrt{u^2+a^2},\quad y=0,\quad z=a\ln\frac{u+\sqrt{u^2+a^2}}{a},$$

通过直接验证就可确认它。那样悬链面的参数方程将为

$$x=\sqrt{u^2+a^2}\cos v,\quad y=\sqrt{u^2+a^2}\sin v,$$

$$z=a\ln\frac{u+\sqrt{u^2+a^2}}{a}。$$

现在计算悬链面的第一二次形式，得到（*）。

701、702．球面。

703．没有边界圆的半球面。

704．没有边界圆的球带（图184），

705. 无界的两个球截（图185），

706. 大圆。

707. 无端点的半个大圆。

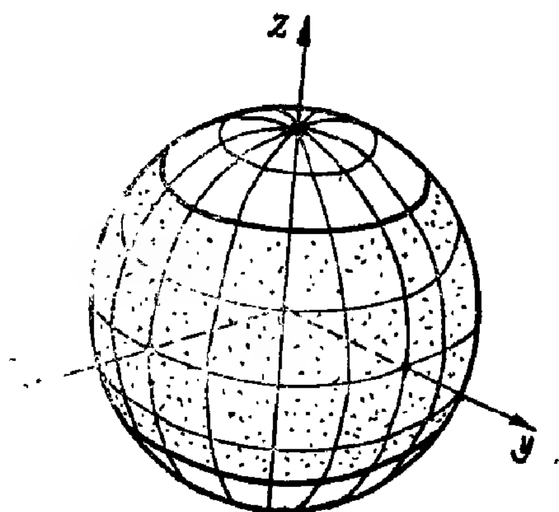


图 184

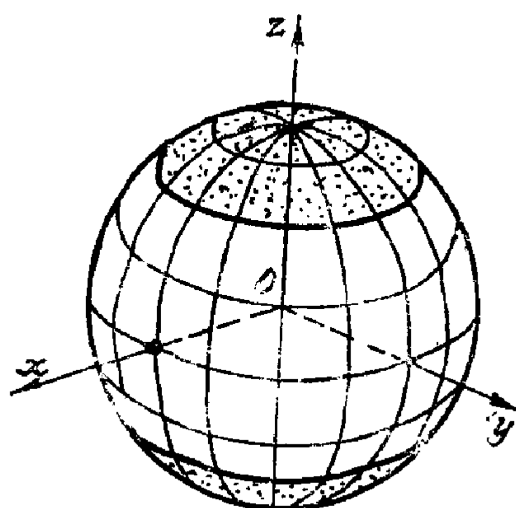


图 185

708. 大圆的两段对称弧。

709. 两条纬线（如果法线指向锥面外）。

710. 不包含两个对径点的球面。

711. 除去一个大圆的球面。

712. 取球面两次，如果竖直线是环面的轴，则环面最上面和最下面的纬线映射为球面的极。

713. 两次取缺一个端点的大圆的四分之一。

714. 取无数次的无极半球面。

716. $\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{f'^2+g'^2}}[(f'g''-f''g')du^2+fg'dv^2]$

717. $\varphi_2=R(du^2+\cos^2 u dv^2)$。

718. $\varphi_2=\frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u+c^2\cos^2 u}}(du^2+\cos^2 u dv^2)$

719. $\varphi_2=\frac{-ac}{\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 u+c^2\operatorname{ch}^2 u}}(du^2-\operatorname{ch}^2 u dv^2)$。

720. $\varphi_2=\frac{ac}{\sqrt{a^2\operatorname{ch}^2 u+c^2\operatorname{sh}^2 u}}(du^2+\operatorname{sh}^2 u dv^2)$。

721. $\varphi_2=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}(du^2+u^2dv^2)$。

722. $\varphi_2=Rdv^2$。

723. $\varphi_2=\frac{ku}{\sqrt{1+k^2}}dv^2$。

724. $\varphi_2=bdu^2+\cos u(a+b\cos u)dv^2$。

725. $\varphi_2=-\frac{1}{a}(du^2-a^2dv^2)$。

726. $\varphi_2=-a\operatorname{ctg} u(du^2-\sin^2 u dv^2)$。

727. $\varphi_2=-\frac{2a\,du\,dv}{\sqrt{u^2+a^2}}$。

729. $\varphi_2 = \dfrac{\partial_{xx} f dx^2 + 2\partial_{xy} f dx dy + \partial_{yy} f dy^2}{\sqrt{1+(\partial_x f)^2+(\partial_y f)^2}}$。

由题目条件

$$\partial_{xx} f = 0, \quad \partial_{xy} f = 0, \quad \partial_{yy} f = 0,$$

这个方程组的通解：

$$f = ax + by + c。$$

730. $\varphi_2 = -\dfrac{a}{u^2+a^2} du^2 + a dv^2$

$\kappa_n|_{v=常数} = -a/(u^2+a^2)$，

$\kappa_n|_{u=常数} = a/(u^2+a^2)$。

731. 若曲面方程取为554题那种形式，则

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = \tau / v\kappa,$$

其中κ和τ分别为已知曲线的曲率和挠率。

732. $\kappa_1 = a/b^2$，$\kappa_2 = a/c^2$。

733. $\dfrac{du}{dv} = \pm\sqrt{u^2+a^2}$；$\kappa_1 = -\kappa_2 = \dfrac{a}{u^2+a^2}$。

735. $\kappa_1 = \sqrt{3}/9$，$\kappa_2 = -\sqrt{3}/3$。

736. $\kappa_1 = 1/p$，$\kappa_2 = 1/q$。

738. 1) $\kappa_n = \dfrac{-du^2}{\sqrt{1+u^2}[(1+u^2)du^2+du^2]}$，

其中 $u = x$，$v = z$

2) $\kappa_n = -1/(1+u^2)^{3/2}$

3) $\kappa_n = -1/21\sqrt{5}$。

739. 1) $\kappa_1 = 1/2\sqrt{5}$，$\kappa_2 = 0$；

2) $x-2=0$，$z-1=0$；$\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{z-1}{2}$，$y=0$；

3) $\kappa = 2/9\sqrt{5}$。

740. 1) $4x^2+9y^2=1$;

2) $R=2/13$。

741. 提示：将欧拉公式记为

$$\frac{1}{r_i}=\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2}-\frac{R_1-R_2}{2R_1R_2}\cos 2\left(\varphi+\frac{i-1}{n}\pi\right),$$

其中，$1/R_1$、$1/R_2$是主曲率，$i=1, 2, \cdots, n$。

742. 球面。

744. 可展曲面。

746. 1）对于由曲线

$x=f(u)$, $y=0$, $z=g(u)$

绕O z轴旋转而得的曲面，

$$K=\frac{g'(f'g''-f''g')}{f(f'^2+g'^2)^2}。$$

2）对于球面，$K=1/R^2$。

3）对于旋转椭圆面，

$$K=-\frac{c^2}{(a^2\cos^2 u+c^2\sin^2 u)^2}。$$

4）对于旋转单叶双曲面，

$$K=-\frac{c^2}{(a^2\mathrm{sh}^2 u+c^2\mathrm{ch}^2 u)^2}。$$

5）对于旋转双叶双曲面，

$$K=\frac{c^2}{(a^2\mathrm{ch}^2 u+c^2\mathrm{sh}^2 u)^2}。$$

6）对于旋转抛物面，

$$K=\frac{1}{(1+4u^2)^2}$$

7）对于圆柱面，

$K=0$。

8）对于圆锥面，

$K = 0$。

9）对于圆环面，

$$K = \frac{\cos u}{b(a + b\cos u)}。$$

10）对于悬链面，

$$K = -\frac{1}{a^2 \mathrm{ch}^4(u/a)}。$$

11）对于伪球面：

$$K = -\frac{1}{a^2}。$$

747．曲面的主曲率半径之一等于抛物线$y^2 = 2px$的曲率半径：

$$R_1^2 = p^2\left(1 + \frac{2x}{p}\right)^2,$$

另一个主曲率半径等于到准线的抛物线法线线段长：

$$R_2^2 = \frac{P^2}{4}\left(1 + \frac{2x}{p}\right)^2$$

因此，

$$|R_1| = 2|R_2|。$$

748. $K = -\frac{1}{A^2}(\partial_{uu}\ln A + \partial_{vv}\ln A)$；（参看660题）

749. $K = -\frac{\partial_{uu}\sqrt{G}}{\sqrt{G}}$。

750. $K = -1$。

751. $K^{-1} = pq\left(1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right)^2$。

753. $K = \dfrac{-1}{(\partial_x F)^2 + (\partial_y F)^2 + (\partial_z F)^2} \begin{vmatrix} \partial_{xx} F & \partial_{xy} F & \partial_{xz} F & \partial_x F \\ \partial_{yx} F & \partial_{yy} F & \partial_{yz} F & \partial_y F \\ \partial_{zx} F & \partial_{zy} F & \partial_{zz} F & \partial_z F \\ \partial_x F & \partial_y F & \partial_z F & 0 \end{vmatrix}$。

754. $K = 4c$

755. 若主法线曲面由方程

$\overline{\rho} = \overline{r}(s) + u\overline{\beta}(s)$,

给出，则

$$K = -\frac{\tau^2}{[(1-u\kappa)^2 + v^2\tau^2]^2}$$

其中κ和τ分别是曲线$\overline{r} = \overline{r}(s)$的曲率和挠率。

如果付法线曲面由方程

$$\overline{\rho} = \overline{r}(s) + v\overline{\gamma}(s)$$

给出，则 $K = -\dfrac{\tau^2}{(1+u^2\tau^2)^2}$

其中τ是曲线$\overline{r} = \overline{r}(s)$的挠率。

756. $H = 0$，$K = -a^2/(a^2+u^2)^2$，在螺旋线上全曲率为常数。

757. $K = \dfrac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$,

$$H = \frac{(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}}$$

其中：$p = \partial_x z$，$q = \partial_y z$，$r = \partial_{xx} z$，$s = \partial_{xy} z$，$t = \partial_{yy} z$。

758. $K=\frac{f' f''}{\rho(1+f'^2)^2}$,

$$H=\frac{f''}{2(1+f'^2)^{3/2}}+\frac{f'}{2\rho\sqrt{1+f'^2}}。$$

759. $H=-1/2a$。

761. 若环面的轴为竖轴，则环面最上面和最下面的纬线由抛物点组成。这些纬线将环面分成由椭圆点组成的外面部分和由双曲点组成的内面部分。

762. 曲面上的所有点都是椭圆点（图186）。

763. 正弦曲线的顶点形成的曲线由抛物点组成，正弦曲线的变曲点形成的曲线不属于曲面。上述两族曲线将整个曲面按全曲率的符号分为两类区域，同一类区域全曲率的符号相同，两相邻区域（上面或下面）全曲率的符号不同（图187）。

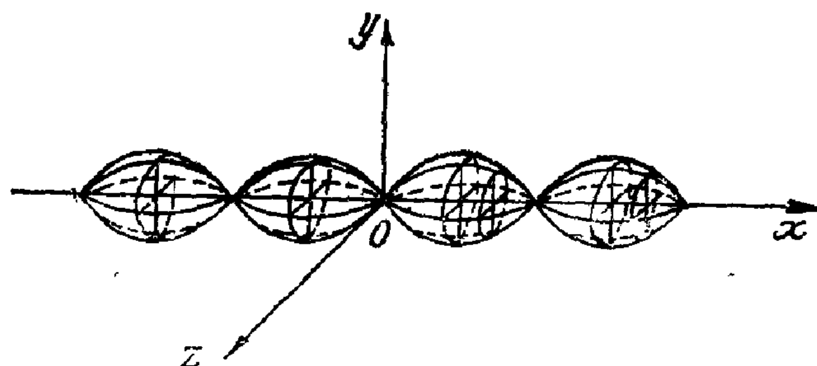


图 186

764. 点 $x=1$，$y=z=0$ 是奇异点，并分曲面为两部分：对于 $x>1$ 的曲面点是椭圆点，对于 $x<1$ 的曲面点是双曲点（图188）。

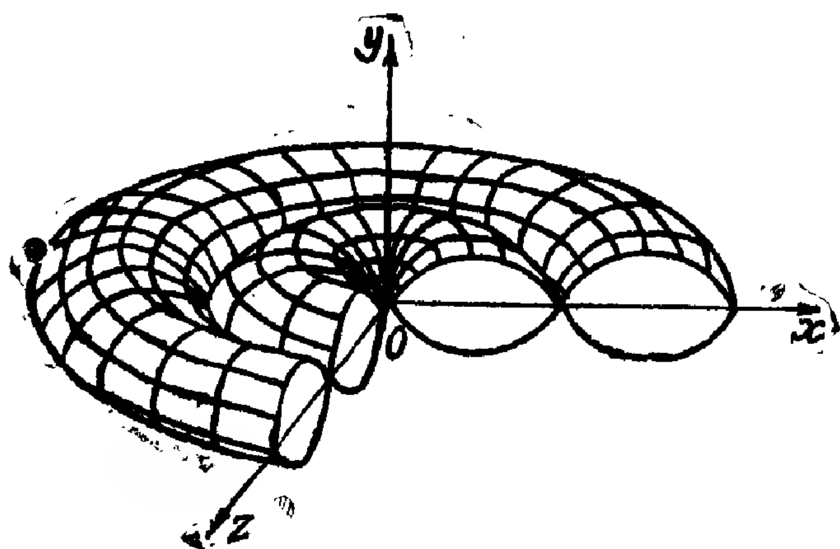


图 187

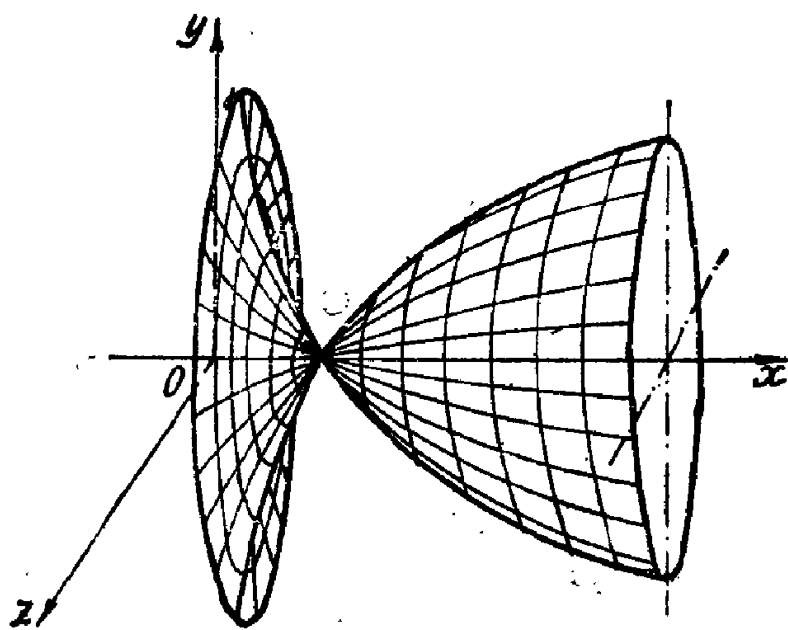


图 188

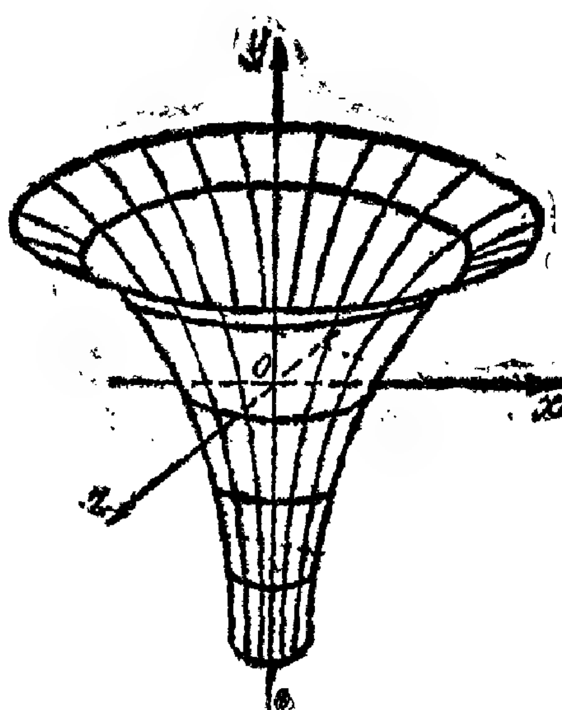


图 189

765. 曲面的所有点都是双曲点（图189）。

766. 若乘积$AB\geqslant0$，则所有的曲面点是双曲点(图190)；若$AB<0$，在曲面上所有三种类型的点可能都有(图191)。

767. 椭圆点。

768. 双曲点。

769, 770. 椭圆点。

771. 双曲点。

772—775. 抛物点。

776. 若$f'f''<0$，是椭圆点，若$f'f''>0$，是双曲点；若$f'f''=0$，是抛物点。

778. 必要性显然。证明充分性：设

$L=\lambda E$，$M=\lambda F$，$N=\lambda G$

将二次形式的系数值代入：

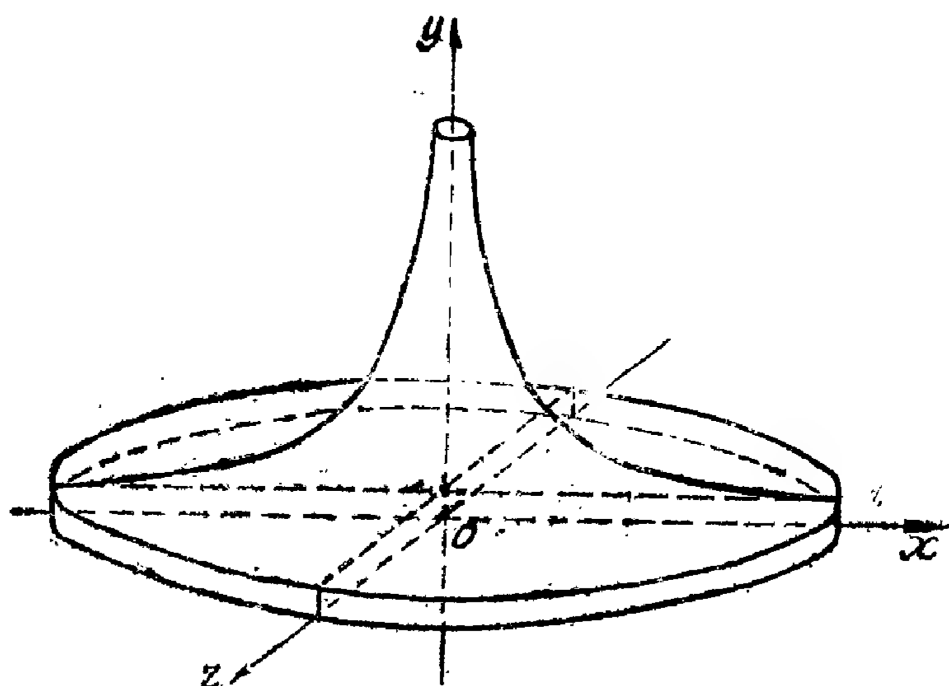


图 190

$$-\partial_u \overline{n}\cdot\partial_u \overline{r} = \lambda\,\partial_u \overline{r}^2,\quad -\partial_u \overline{n}\cdot\partial_v \overline{r} = \lambda\,\partial_u \overline{r}\cdot\partial_v \overline{r},$$

或者

$$(\overline{n}_u + \lambda\overline{r}_u)\cdot\overline{r}_u = 0,\quad (\overline{n}_u + \lambda\overline{r}_u)\cdot\overline{r}_v = 0$$

这里再列出等式

$$(\overline{n}_u + \lambda\overline{r}_u)\overline{n} = 0,$$

得到

$$\overline{n}_u + \lambda\overline{r}_u = \overline{0}。$$

同理可证矢量 $\overline{n}_v + \lambda\overline{r}_v$ 为零矢

于是，

$$\overline{n}_u = -\lambda\overline{r}_u,\quad \overline{n}_v = -\lambda\overline{r}_v \qquad (*)$$

对 v 微分第一个方程，对 u 微分第二个方程

得到

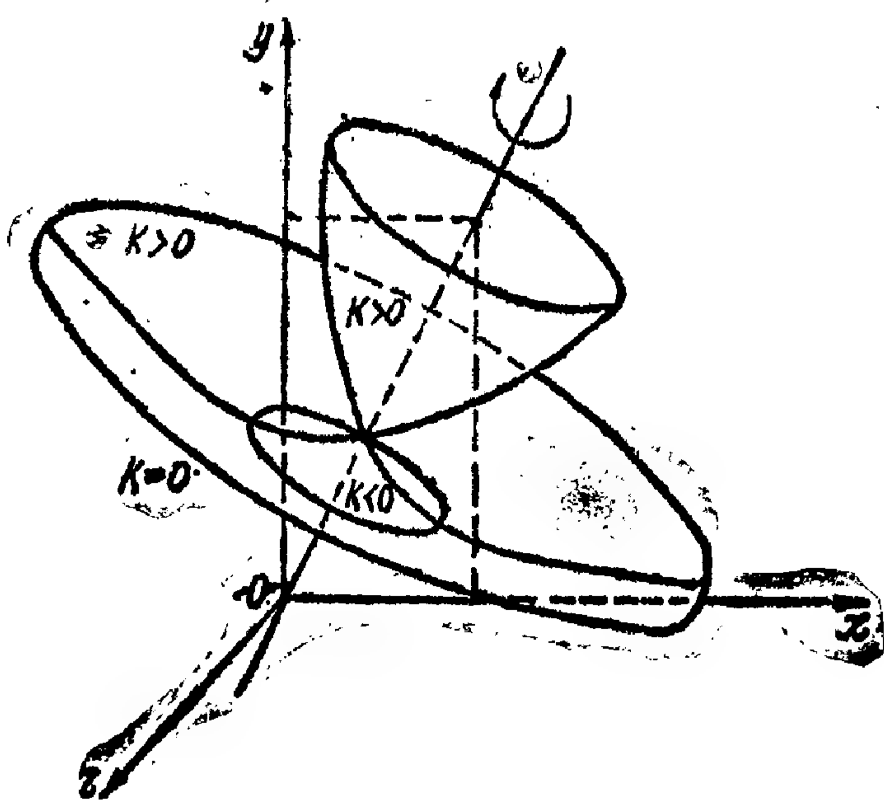


图 191

$$\overline{n}_{uv} = -\lambda_v \overline{r}_u - \lambda \overline{r}_{uv}, \quad \overline{n}_{vu} = -\lambda_u \overline{r}_v - \lambda \overline{r}_{vu}$$

故得

$$\lambda_v \overline{r}_u - \lambda_u \overline{r}_v = \overline{0}。$$

若λ_u、λ_v值之一不为零，则矢量$\overline{r}_u$与$\overline{r}_v$共线，这是不可能的，除去这种情况，得到

λ = 常数。积分方程（＊）：

$$r = -\frac{n}{\lambda} + r_0 \text{ 或 } (\overline{r} - \overline{r}_0)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \text{（球面）}。$$

780。建立任意经线的渐缩线，并求得它与旋转轴的交点P_1，P_2……。设M_1、M_2为与它们对应的渐伸线（经线）上的点，那么过这些点的纬线是由圆点组成。

781. 由正弦曲线的顶点形成的纬线，而且仅仅是它们(参看780和389题)

782. 两个点——椭圆面与旋转轴的交点。

783. 抛物面的顶点。

784. 在抛物面

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\quad p>q>0$$

上有两个圆点：

$$A_{1、2}\left(0,\ \pm\sqrt{pq-q^2},\ (p-q)/2\right)。$$

785. 在椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a>b>c>0,$$

上有四个圆点：

$$A_{1—4}\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},0,\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right)。$$

786. 在双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\quad a>b>0,$$

上有四个圆点

$$A_{1—4}\left(0,\ \pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}},\ \pm c\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\right)。$$

789. 例如，由抛物线 $y=x^4$ 绕 Oy 轴旋转所得的曲面。

790. 例如，在柱面 $y=x^4$ 上轴 Oz 是由平点组成。

791. 利用729题。

792. $Mdu+Ndv=0,\ Ldu+Mdv=0$

793. $LR-MQ+NP=0$

795.

$$\left(L\frac{\partial\varphi}{\partial v}-M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du+\left(M\frac{\partial\varphi}{\partial v}-N\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv=0。$$

797. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=C_1$。

798. $\overline{b}$ (1, 0, −1) 。

799. $(LB-MA)du+(MB-NA)dv=0$ 。

801. $v=\operatorname{arctg}u+C$。

804. 取伪球面的方程为

$x=a\sin u\cos v$， $y=a\sin u\sin v$，

$z=a\ln\operatorname{tg}(u/2)+a\cos u$，

得到

$$\ln\operatorname{tg}(u/2)\pm v=C。$$

若引进新参数

$u'=\ln\operatorname{tg}(u/2)+v$，

$v'=\ln\operatorname{tg}(u/2)-v$，

则坐标网将是渐近曲线网，且第一、二次形式的系数满足657题的要求。

806. 若从旋转曲面的方程

$x=f(u)\cos v$， $y=f(u)\sin v$， $z=\varphi(u)$

出发，则得到

$$(f'\varphi''-f''\varphi')du^2+f\varphi'dv^2=0。$$

807. $u\pm v=$常数

808. 若取环面的方程为

$x=(a+b\cos u)\cos v$， $y=(a+b\cos u)\sin v$，

$z=b\sin u$，

则渐近曲线的微分方程为

$$b\,du^2+\cos u(a+b\cos u)dv^2=0。$$

当 $\pi/2<u<3\pi/2$，它有通解

$$v+C=\pm\int\frac{\sqrt{b}\,du}{\sqrt{-\cos u(a+b\cos u)}}。$$

显然，曲线 $u=\pi/2$，$u=3\pi/2$ 同样是微分方程的解（它的奇解）。它们包络位于环面里面部分的渐近曲线族（图192）。

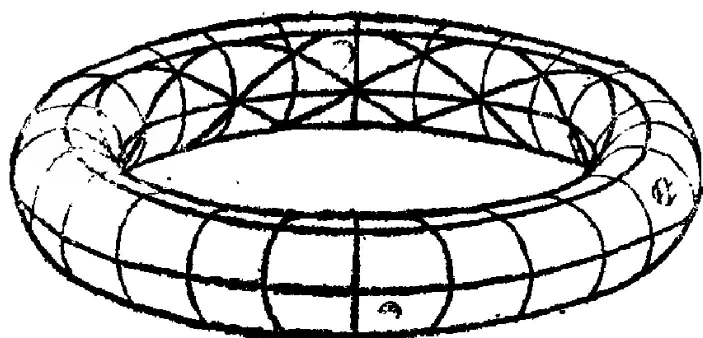


图 192

809. 直母线和它们的正交轨线（即螺旋线）。

810. 直母线

811. 曲面的方程为 $x^3z-y^3=0$。渐近曲线的微分方程：

$$2y^2dx^2-3xydxdy+x^2dy^2=0,$$

或：

$$(xdy-ydx)(2ydx-xdy)=0。$$

因此，存在两族渐近曲线：

1）$y=c_1x$，$z=c_1^3$；

2）$y = c_2 x^2$，$z = c_2^3 x^3$。

814．若$\kappa_1 + \kappa_2 = 0$，则由欧拉公式推得：

$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0$，

其中 φ是渐近曲线和主方向的夹角。由此得：

$\varphi = \pm\pi/4$，即渐近方向间的夹角等于$\pi/2$。

817．取已知曲面的渐近曲线网为坐标网，则有$L = 0$，$N = 0$。为了使在平行曲面的对应网亦由渐近曲线组成，必须满足条件$L^* = 0$，$N^* = 0$。

因为 $L^* = aKE + (1-2aH)L$，

$N^* = aKG + (1-2aH)N$，

则当$K \neq 0$时，系数L^*、N^*不等于零，这就证明了题目中所要求的。

820．直母线和它们的正交轨线，正交轨线是平面截线。

821．直母线和球面与锥面的交线，这些球面有任意的半径而球心在锥面的顶点。

822．纬线和经线。

823．坐标曲线。

824．直母线和它们的正交轨线。

825．若正螺面的方程为

$x = u\cos v$，$y = u\sin v$，$z = av$，则曲率线的微分方程是 $(a^2 + u^2)dv^2 - du^2 = 0$，

由此，$v = \pm\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$。

826．$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,\\&\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{qC} = \frac{q-p}{1+C} \quad (C \neq 0),\end{aligned}\right\}$$

以及平面 $x=0$ 和 $y=0$ 截椭圆抛物面的截线。

831. $\overline{R}=\overline{r}(s)+R_1\overline{n}(s)$，其中 $\kappa_1=1/R_1$ 是沿已知曲线的主曲率。因此，曲面沿曲率线的法线的包络由主曲率中心组成，它的密切平面与曲率线在对应点的法截面重合。

834. 在已知曲面上采取正交网为坐标网，则有 $F=0$。对于在平行曲面的对应坐标网应有 $F^*=0$。取所考虑的曲面的方程为

$\overline{r}=\overline{r}(u,v)$ 和 $\overline{r}=\overline{r}(u,v)+a\overline{n}(u,v)$。

则有 $F^*=2a(aH-1)M$，

由此推得，在两种情况下 $F^*=0$：

1）$M=0$；则在已知曲面上的正交网由曲率线组成；

2）$a=1/H$，则已知曲面具有固定的中曲率，且其上的任何正交网将对应的同样是正交网。

835. 这反对旋转椭园面才有可能。

845. 设直母线平行 Oz 轴，则曲面的方程能表示为：

$$\overline{r}=f(u)\overline{i}+\varphi(u)\overline{j}+v\overline{k},$$

其中 u 看作是准线的自然参数。我们将求形式为

$$v=v(u) \qquad (*)$$

的测地线方程。那么

$$\overline{N}=\overline{r}_u\times\overline{r}_v=\varphi'\overline{i}-f'\overline{j},$$

$$d\overline{r}=(f'\overline{i}+\varphi'\overline{j}+v'\overline{k})du,$$

$$d^2\overline{r}=(f''\overline{i}+\varphi''\overline{j}+v''\overline{k})du^2,$$

测地线的方程为

$$\begin{vmatrix} \varphi' & -f' & 0 \\ f' & \varphi' & v' \\ f'' & \varphi'' & v'' \end{vmatrix} = 0$$

或 $(\varphi'^2 + f'^2)v'' - (\varphi'\varphi'' + f'f'')v' = 0$。

但 $\varphi'^2 + f'^2 = 1$；因此，

$$\varphi'\varphi'' + f'f'' = \frac{1}{2}(\varphi'^2 + f'^2)' = 0.$$

这样，$v'' = 0$；因此，$v = c_1 u + c_2$。测地线族的矢量方程为

$$\overline{r} = f(u)\overline{i} + \varphi(u)\overline{j} + (c_1 u + c_2)\overline{k},$$

故得

$$\cos\theta = \cos(\widehat{\overline{r}, Oz}) = \frac{\frac{d\overline{r}}{du}\cdot\overline{k}}{\left|\frac{d\overline{r}}{du}\right|}$$

$$= \frac{c_1}{\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + c_1^2}} = \frac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}}.$$

因此，所求的测地线是一般螺旋线。

此外，直母线是测地线，它们不属于通解，因为它们的方程不能表示为（*）。

由于过柱面的每一点沿任意方向都有或是一般螺旋线或是直母线通过，因此这些曲线的每一条都是测地线。

848．球面的大圆。

852．参看477，632，851题。

856．$\kappa_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}$。

857. $\kappa_g = \dfrac{|u|}{u^2 + a^2}$。

858. $\kappa_g|_{u=c} = \dfrac{|u|}{u^2 + f'^2(v)}$ $\kappa_g|_{v=c} = 0$。

863. 取正螺面的方程为

$x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$。

首先注意到，直母线即曲线 $v =$ 常数是测地线。现在设 $dv \neq 0$ 得测地线的微分方程为

$$\frac{d^2 u}{dv^2} - \frac{2u}{a^2 + u^2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 - u = 0。$$

为了解方程施行新的变换，设 u 为独立变量，

而 $p = \dfrac{du}{dv}$ 是依赖 u 的函数。方程为

$$p\frac{dp}{du} - \frac{2u}{a^2 + u^2}p^2 - u = 0。$$

设 $z = p^2$，得到

$$\frac{dz}{du} - \frac{4u}{a^2 + u^2}z - 2u = 0。$$

这个方程的通解是

$$z = (a^2 + u^2)^2\left(C_1 - \frac{1}{a^2 + u^2}\right),$$

故得： $$v = \int \frac{du}{(a^2 + u^2)\sqrt{C_1 - \dfrac{1}{a^2 + u^2}}} + C_2。$$

864. 取伪球面的第一二次形式为

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

（参看660题）。则测地线的微分方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{1}{y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=0,\\&\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{2}{y}\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds}=0\end{aligned}\right\}$$

曲线 $x=$ 常数满足此方程组。

若 $x\neq$ 常数，则方程组能用方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{y}=0$$

代替，它的通解为：

$$(x-C_2)^2+y^2=C_1^2。$$

865．提示：沿测地线把 v 看作 u 的函数，得到李乌维尔曲面测地线的微分方程

$$2(f+\varphi)\frac{d^2v}{du^2}=-\frac{df}{du}\left(\frac{dv}{du}\right)^3+\frac{d\varphi}{dv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2-\frac{df}{du}\frac{dv}{du}+\frac{d\varphi}{dv},$$

或：$(f+\varphi)du^2d(dv^2)=(du^2+dv^2)(d\varphi du^2-dfdv^2)$，

故得

$$d\left(\frac{\varphi du^2-fdv^2}{du^2+dv^2}\right)=0。$$

积分此式，得到所求的方程。

866．提示：先证

$$\rho\cos\mu=(\overline{e},\ \overline{r},\ \overline{\alpha}),$$

其中 $\overline{e}$ 是沿旋转轴方向的单位矢量，$\overline{r}$ 是由O点起算测地线动点的径矢，选择原点O在旋转轴上，$\overline{\alpha}$ 是测地线的单位切线矢量。然后证，所得混合积的微分等于零。逆定理不成立，因为沿任一纬线上述关系式均成立，然而不是所有的纬

线都是测地线。

867。设r_0是旋转椭圆面最大纬线L的半径，M_0是此纬线上的一点，观察过点M_0并与纬线L的交角为$\mu_0=0$的测地线。据克列洛定理沿此测地线有

$$\rho\cos\mu=r_0;$$

由此得

$$\rho=r_0,\ \cos\mu=1。$$

因此，$\mu=0$且测地线与纬线L重合。

现在取与纬线交直角即$\mu_0=\pi/2$的测地线，据克列洛定理$\rho\cos\mu=0$，因此$\mu=\pi/2$，且测地线与经线重合。

设$0<\mu_0<\pi/2$，记$r_0\cos\mu_0=C_0$，得到，沿测地线有$\rho\cos\mu=C_0$。由此推得，它与具有半径$\rho<C_0$的椭园面的所有纬线交成非零角，随后与半径$\rho=C_0$的纬线相切，再伸向纬线L那边（图193）。

868。设r_0是单叶旋转双曲面最小纬线L_0的半径，M_1是位于不同于L_0的纬线L_1上的点。

显然，对于过点M_1的测地线．在克列洛定理中的常数C的取值范围为$0\leqslant C\leqslant r_1$，其中$r_1$是纬线$L_1$的半径。如果$C<r_0$，则测地线与曲面的所有纬线交成非零角。

在$C\geqslant r_0$，所有测地线位于曲面的这样一部分上，它被半径为C的纬线L所限制并含有点M_1，它与这部分曲面上除纬线L外的所有纬线相交。如果$C>r_0$，测地线与纬线L相切。如果$C=r_0$，则测地线无限接近纬线L，并在曲面上绕无数圈（图194）。

869。设r_0和r_1分别是最小和最大的纬线的半径，在克列洛定理中常数C取值范围为$0\leqslant C\leqslant r_1$。环面上所有

的纬线（当C＝0），最小的纬线（当C＝r_0）和最大的

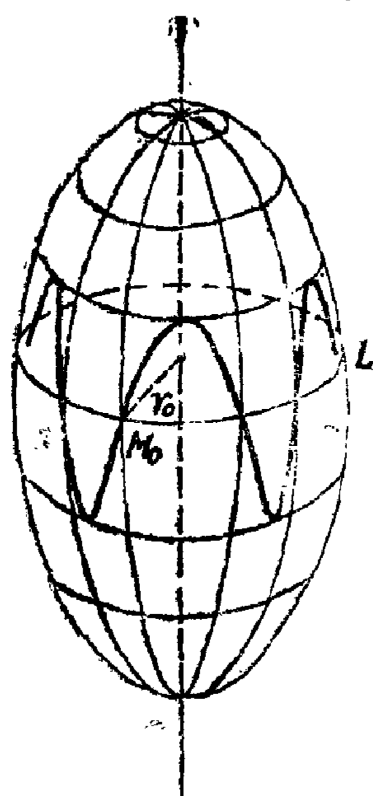


图 193

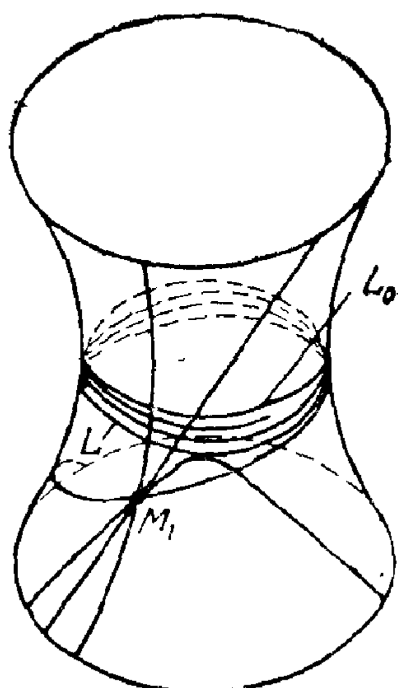


图 194

纬线（当C＝r_1）是环面的测地线。C不是上述值，测地线在两个半径C的纬线间象正弦曲线样摆动。最后，在环面上还存在这样的测地线（当C＝r_0），它们绕在环面上，从两边无限接近最小纬线并绕无数圈（图195）。

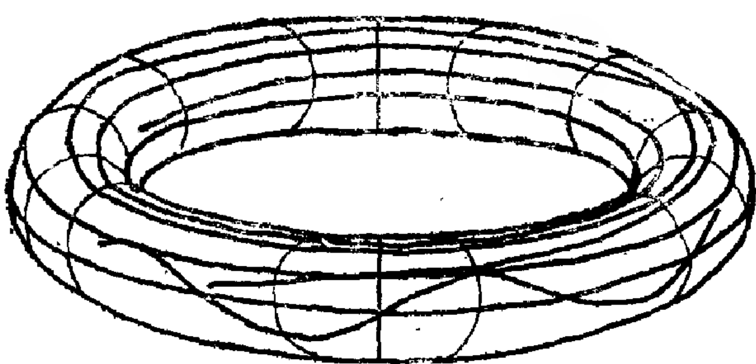


图 195

870．提示：利用半测地坐标系。

871．标架正交性的条件是

$$\overline{e}_i\cdot\overline{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 如果\ i=j,\\ 0, & 如果\ i\neq j。\end{cases}$$

微分这些等式并利用§18的公式（2）得到

$$d\overline{e}_i\cdot\overline{e}_j+\overline{e}_i\cdot d\overline{e}_j=0,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\ \overline{e}_k\cdot\overline{e}_j+\sum_{k=1}^{3}\omega_j^k\ \overline{e}_i\cdot\overline{e}_k=0,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\ \delta_{kj}+\sum_{k=1}^{3}\omega_j^k\ \delta_{ik}=0,$$

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0。$$

872．因为$\overline{M}$是曲面点的经矢，因此$d\overline{M}$属于切平面，故是矢量$\overline{e}_1$和$\overline{e}_2$的线性组合。

873．矢函数$\overline{e}_3$确定了曲面的球面映射，因此，$d\overline{e}_3(\overline{h})=\mathscr{A}(\overline{h})$，其中$\mathscr{A}$是基本算子。对于具有主方向的矢量$\overline{h}$，$\mathscr{A}(\overline{h})=\lambda\overline{h}$。如果$\overline{e}_1$是曲率线$\gamma$的切矢量，则

$$d\overline{e}_3(\overline{e}_1)=\omega_3^1(\overline{e}_1)\overline{e}_1+\omega_2^3(\overline{e}_1)\overline{e}_2$$

与矢量$\overline{e}_1$共线，即在曲线γ的点上$\omega_3^2(\overline{e}_1)=0$。

874．因为$\overline{M}$是曲面点的经矢，因此矢函数$\overline{M}$是曲面的恒等变换，且对于任意切矢量$\overline{h}$有$d\overline{M}(\overline{h})=\overline{h}$，特别有

$$d\overline{M}(\overline{e}_1)=\omega^1(\overline{e}_1)\overline{e}_1+\omega^2(\overline{e}_1)\overline{e}_2=\overline{e}_1,$$

$$d\overline{M}(\overline{e}_2)=\omega^1(\overline{e}_2)\overline{e}_1+\omega^2(\overline{e}_2)\overline{e}_2=\overline{e}_2。$$

875．因为矢量$\overline{e}_1$、$\overline{e}_2$是单位矢量，而$|\partial_u\overline{r}|$

$=\sqrt{E}$，$|\partial_u \overline{r}|=\sqrt{G}$，因此由题中条件得到

$$\partial_u \overline{r}=\sqrt{E}\,\overline{e}_1,\quad \partial_v \overline{r}=\sqrt{G}\,\overline{e}_2。$$

其次

$$\omega^1=f_1du+f_2dv,\quad f_1=\omega^1(d_u\overline{r}),$$
$$f_2=\omega^2(d_u\overline{r}),$$

$$\omega^1(\partial_u\overline{r})=\omega^1(\sqrt{E}\,\overline{e}_1)=\sqrt{E}\,\omega^1(\overline{e}_1)=\sqrt{E},$$

$$\omega^1(\partial_v\overline{r})=\omega^1(\sqrt{G}\,\overline{e}_2)=\sqrt{G}\,\omega^1(\overline{e}_2)=0。$$

所以，$\omega^1=\sqrt{E}\,du$。对于形式ω^2也类似可得。

876．对于1—形式，ω^1、ω^2所要求的表示式在875题已得到。对于$\omega_1^3=\lambda du+\mu dv$可由874题推得，$\mu=0$，记 $\lambda=p_1\sqrt{E}$，得$\omega_1^3=p_1\sqrt{E}du$。类似地可得

$$\omega_2^3=p_2\sqrt{G}\,dv。$$

对于形式$\omega_1^2=f\,du+g\,dv$，我们记$f=q_1\sqrt{E}$，$g=q_2\sqrt{G}$。

877．观察原点在点M的某个正交标架

$$(M_0,\overline{e}_1^0,\ \overline{e}_2^0,\ \overline{e}_3^0),$$

如果§18的方程组（4）是完全可积的，那么存在唯一解

$$\overline{M}=\overline{M}(u,v),\quad \overline{e}_i=\overline{e}_i(u,v),$$

满足初始条件

$$\overline{M}(u_0,v_0)=\overline{M}_0,\quad \overline{e}_i(u_0,v_0)=\overline{e}_i^0。$$

在几何上这就意味着存在曲面，这个曲面的每一点伴随有正交标架（$\overline{M}$、$\overline{e}_1$、$\overline{e}_2$、$\overline{e}_3$）。

878．设条件（3）被满足，则有

$$d\omega_1^2 = (\partial_u(q_2\sqrt{G}) - \partial_v(q_1\sqrt{E}))\,du\wedge dv,$$

$$\omega_1^3\wedge\omega_3^2 = -p_1\sqrt{E}\,p_2\sqrt{G}\,du\wedge dv;$$

因此由条件（5）推得，$d\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2$。对于其余形式和相反的论断类似可得。

881．由内部方程 $u=u(s)$ $v=v(s)$ 给出的曲线 γ 的法曲率可根据公式

$$\kappa_n=\frac{\varphi_2(\gamma')}{\varphi_1(\gamma')}=\frac{p_1E(u')^2+p_2G(v')^2}{E(u')^2+G(v')^2}$$

求得。如果 γ 是坐标曲线 $v=0$，则有 $v'=0$ 和 $\kappa_1=p_1$。对于第二条坐标曲线有类似结论。

882．位于直线 $M\overline{e}_1$ 上的径矢为 $\overline{F}=\overline{M}+\lambda\overline{e}_1$ 的点的位移等于

$$d(\overline{M}+\lambda\overline{e}_1)=(\sqrt{E}\,du+d\lambda)\,\overline{e}_1+[\sqrt{G}\,dv$$
$$+\lambda(q_1\sqrt{E}\,du+q_2\sqrt{G}\,dv)]\overline{e}_2+p_1\sqrt{E}\,du\,\overline{e}_3。$$

当点M沿第一条坐标曲线 $u=$ 常数移动时，则有

$\partial_v M=\sqrt{G}\,\overline{e}_3$，而点F沿脊线移动，即矢量

$\partial_v(\overline{M}+\lambda\overline{e}_1)$ 与矢量 $\overline{e}_1$ 共线，故得

$\partial_v(\overline{M}+\lambda\overline{e}_1)=\partial_v\lambda\,\overline{e}_1$，$1+\lambda q_2=0$。

类似地可得　$1-\lambda q_1=0$。

883．设 $\overline{h}$ 是曲面上曲线的单位切矢量，那么

$$\overline{h}=\cos\varphi\,e_1+\sin\varphi\,\overline{e}_2=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{E}}\partial_u\overline{r}+\frac{\sin\varphi}{\sqrt{G}}\partial_v\overline{r}$$

$$\kappa_n(\overline{h})=\frac{\varphi_2(\overline{h})}{\varphi_1(\overline{h})}=\frac{p_1E\dfrac{\cos^2\varphi}{E}+p_2G\dfrac{\sin^2\varphi}{G}}{E\dfrac{\cos^2\varphi}{E}+G\dfrac{\sin^2\varphi}{G}}$$

$$= p_1\cos^2\varphi + p_2\sin^2\varphi。$$

884．在曲面某点M的切平面中选取笛卡尔直角坐标系$(\overline{M},\ \overline{e}_1,\overline{e}_2)$，在这个坐标系下任意点的坐标用x和y表示。如果φ是第一坐标曲线和任意法截线间的夹角，则由桂潘标线的定义推得

$$x = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{|\kappa_n|}},\qquad y = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{|\kappa_n|}}。$$

那么由欧拉公式

$$\kappa_n = p_1\cos^2\varphi + p_2\sin^2\varphi$$

得到

$$p_1x^2 + p_2y^2 = \pm 1$$

885．提示：由§18方程组（5）的前面三个方程推得公式。

886．在沿渐近曲线移动时有

$$\overline{e}_3 d^2\overline{M} = p_1 E du^2 + p_2 G dv^2 = 0。$$

因此由§18方程（2）和（3）及公式$K = p_1p_2$推得

$$K dA^2 - d\overline{e}_3{}^2 = 0,$$

由此

$$K + \left(\frac{d\overline{e}_3}{ds}\right)^2 = 0。$$

因为沿渐近曲线付法矢$\overline{\gamma}$与矢量$\overline{e}_3$重合，因此

$$\frac{d\overline{e}_3}{ds} = -\tau\overline{\beta}。$$

所以，$K + \tau^2 = 0$。

887．由§18公式(2)和(3)以及

$$\kappa_g = \left(\overline{e}_3,\frac{d\overline{M}}{ds},\ \frac{d^2\overline{M}}{ds^2}\right)$$

得到题示的式子。

888. 由878题有 $d\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2$，而根据§18公式（3）有

$$d\omega_1^2=-p_1p_2\sqrt{EG}\,du\wedge dv,$$

$$\omega^1\wedge\omega^2=\sqrt{EG}\,du\wedge dv,$$

由此

$$d\omega_1^2=-\kappa\,\omega^1\wedge\omega^2。$$

889。在曲面上考察矢量 $\overline{a}=a^\alpha\overline{e}_\alpha$，$\overline{b}=b^\alpha\overline{e}_\alpha$。当它们沿曲面平行移动时具有

$$d\overline{a}=a^\beta\omega_\beta^3\overline{e}_3,\ d\overline{b}=b^\beta\omega_\beta^3\overline{e}_3,$$

$$d(\overline{a}\cdot\overline{b})=d\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot d\overline{b}$$

$$=(a^\beta\omega_\beta^3\overline{e}_3)b^\alpha\overline{e}_\alpha+a^\alpha\overline{e}_\alpha\cdot(b^\beta\omega_\beta^3\overline{e}_3)$$

因为 $\overline{e}_3\cdot\overline{e}_\alpha=0$，那么 $d(\overline{a}\cdot\overline{b})=0$，因此在矢量平行移动时，矢量的数量积保持一定，所以矢量的长度和它们间的角度也保持一定。

891. 微分关系式 $\overline{\xi}\cdot\overline{e}_1=\cos\varphi$，求得

$$-\sin\varphi d\varphi=d\overline{\xi}\cdot\overline{e}_1+\overline{\xi}\cdot d\overline{e}_1=\overline{a}^\alpha\omega_\alpha^3\overline{e}_3\cdot\overline{e}_1$$

$$+\overline{\xi}d\overline{e}_1=\overline{\xi}\cdot d\overline{e}_1。$$

如果取另外的沿已知曲线平行移动的矢量代替矢量 $\overline{\xi}$、则它们与矢量 $\overline{\xi}$ 形成的夹角 φ，彼此将有不同的固定值，因为矢量之间的角度在它们平行移动时保持一定，因此在任意选取平行移动矢量时，$d\varphi$ 将有同一个值。选取矢量 $\overline{e}_2$ 作为矢量 $\overline{\xi}$ 得

$$-d\varphi=\overline{e}_2\cdot d\overline{e}_1=\omega_1^2=q_1\sqrt{E}\,du+q_2\sqrt{G}\,dv。$$

892. 由§18公式（6）有

$$\triangle\varphi=\oint_L -(q_1\sqrt{E}\,du+q_2\sqrt{G}\,dv),$$

根据公式

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

再利用§18的（5）式，求得

$$\triangle\varphi=\iint_D K\sqrt{EG}\,du\,dv。$$

因为$K=p_1p_2$，$d\sigma=\sqrt{EG}\,du\,dv$，那么

$$\triangle\varphi=\iint_D K\,d\sigma。$$

893. 设$\frac{d\overline{A}}{ds}$是边界线L在点A的切线单位矢量，s是曲线L的弧长，$\overline{a}$是在曲面上沿边界线L平行绕动的单位矢量。此时

$$\cos\psi=\overline{a}\cdot\frac{d\overline{A}}{ds},\quad d\overline{a}=a^\alpha\omega_\alpha^3\,\overline{e}_3。$$

由此

$$-\sin\psi\,d\psi=\overline{a}\cdot\frac{d^2\overline{A}}{ds^2}ds。$$

设在边界线L的某点A_0有

$$\psi=\frac{\pi}{2},\quad \overline{a}=\frac{d\overline{A}}{ds}\times\overline{e}_3。$$

那么 $d\psi=\left(\overline{e}_3,\frac{d\overline{A}}{ds},\frac{d^2\overline{A}}{ds^2}\right)ds,$

或 $d\psi=\kappa_g\, ds$，

在点A沿边界线L由起始位置A_0绕行一周后矢量$\frac{d\overline{A}}{ds}$转动2π角，矢量$\overline{a}$关于矢量$\frac{d\overline{A}}{ds}$的转角

$$\triangle\psi=\oint_L \kappa_g\, ds。$$

因此

$$\triangle\varphi+\triangle\psi=2\pi。$$

896. 由公式

$$\iint_D K\, d\sigma+\int_L \kappa_g\, ds=2\pi,$$

当$\kappa_g=0$时则得

$$\iint_D K\, d\sigma=2\pi。$$

如果在曲面的所有点$K\leqslant 0$，则这个等式不能成立。

897. 在xOy平面上是椭圆

$$2x^2+3y^2-2xy-4x+18y-16=0,\quad z=0$$

的内部区域；在yOz平面上是椭圆

$$5y^2+8z^2+32y-32z-4=0,\quad x=0$$

的内部区域；在xOz平面上是椭圆

$$23x^2+54z^2+18x-216z-324=0,\quad y=0$$

的内部区域。

900. 先证明所研究的渐近曲线L的每一条都是直线。假设不是这样，曲面沿曲线L的法线平行定平面，因此$\overline{n}\cdot\overline{e}=0$，其中$\overline{e}$为常矢。因为在渐近曲线上付法矢

$\overline{\gamma}=\pm\overline{n}$，因此$\overline{\gamma}\cdot\overline{e}=0$。微分这个等式得

$$\tau\overline{\beta}\cdot\overline{e}=0$$

但$\tau\neq 0$，因为否则$\overline{\gamma}=\overline{n}$是常矢且渐近曲线的球面表示将为一点。这样$\overline{\gamma}\cdot\overline{e}=\overline{\beta}\cdot\overline{e}=0$；

因此$\overline{\alpha}=\pm\overline{e}$，故得

$$\frac{d\overline{\alpha}}{ds}=\kappa\overline{\beta}=\overline{0}\text{和}\kappa=0$$

与假设矛盾。因此，曲面S是直纹曲面，且它不可展，因为在可展的情况下渐近曲线的球面表示是一个点。

901．如果把旋转曲面的方程写成

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,\quad z=u,$$

那么由中曲率为零可得

$$1+\varphi'^2-\varphi\varphi''=0。$$

作变量替换，取新函数$p=\dfrac{d\varphi}{du}$和新独立变量φ，则有

$$1+p^2-\varphi p\frac{dp}{d\varphi}=0,$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{1}{2}d(\ln(1+p^2)),$$

故得　$c^2\varphi^2=1+p^2$。

转到前面的变量，得

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{c^2\varphi^2-1}}=du,$$

积分这方程得

$$ch^{-1}(c\varphi)=cu+b,$$

$$\varphi=\frac{1}{c}ch(cu+b)。$$

这故旋转曲面为悬链面。

902. 在极小曲面的每一点存在两族相互正交的渐近曲线，其中一族为直母线，另一族是非直线的渐近曲线，它们的主法线均是那族直母线，这是因为渐近曲线的密切平面与曲面的切平面重合，这样这族非直线的渐近曲线具有公共的主法线，因而是贝特朗曲线，且有无数条共轭的贝特朗曲线，因而是圆柱螺线，故曲面是圆柱螺线的主法线曲面，即为正螺面。

903. 令 $\frac{y}{x}=u$，则中曲率为零的条件化为

$$(1+u^2)f''+2uf'=0,$$

积分这方程得到

$$(1+u^2)f'(u)=a,\quad f'(u)=a/(1+u^2)。$$

将此方程积分，得

$$f(u)+b=z+b=a\,\mathrm{arc\,tg}\,u,$$

因此，

$$u=\mathrm{tg}\frac{z+b}{a},\quad \frac{y}{x}=\mathrm{tg}\frac{z+b}{a},$$

这是正螺面

$$x=\tilde{u}\cos\tilde{v},\quad y=\tilde{u}\sin\tilde{v},\quad z=a\tilde{v}-b$$

的隐式方程。

904. 曲面 S 和 S^* 的第一和第二二次形式的系数满足关系式：

$$E^*=(1-a^2K)E+2a(aH-1)L,$$

$$F^*=(1-a^2K)F+2a(aH-1)M,$$

$$G^*=(1-a^2K)G+2a(aH-1)N,$$

$$L^*=aKE+(1-2aH)L,$$

$$M^* = aKF + (1-2aH)M,$$
$$N^* = aKG + (1-2aH)N。$$
由此得到所求的表示式：
$$K^* = \frac{K}{1-2aH+a^2K}, H^* = \frac{H-aK}{1-2aH+a^2K}。$$
905. 将 $a = 1/2H$ 代入公式
$$K^* = \frac{K}{1-2aH+a^2K},$$
得 $K^* = 4H^2$ = 常数。

906. 设在曲面 S 上坐标曲线与曲率线重合，利用基本算子，得
$$\bar{r}_u^* = (1-a\kappa_1)\bar{r}_u, \quad \bar{r}_v^* = (1-a\kappa_2)\bar{r}_v。$$
因此，曲面 S 和 S^* 的第一二次形式的系数以下面的关系式联系：
$$E^* = (1-a\kappa_1)^2 E, \quad G^* = (1-a\kappa_2)^2 G,$$
$F^* = F = 0$。
由此
$$d\sigma^* = (1-a\kappa_1)(1-a\kappa_2)d\sigma$$
且 $\lim\limits_{a\to 0} \frac{d\sigma - d\sigma^*}{2a\,d\sigma} = \lim\limits_{a\to 0}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} + \frac{1}{2}a\kappa_1\kappa_2\right)$
$$= \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = H。$$

907. 设 S 为极小曲面，S^* 为平行它的曲面，且它们之间沿法线的距离等于 a 。如906题得到的一样，曲面 S 和 S^* 的相应面积元素满足关系式：
$$d\sigma^* = (1+a^2K)d\sigma。$$
其中 K 为曲面 S 的全曲率，因此

$$\iint_D d\sigma^* = \iint_D d\sigma + a^2\iint_D K\,d\sigma。$$

因为在极小曲面上$K\leqslant 0$，那么

$$\iint_D d\sigma^* \leqslant \iint_D d\sigma。$$

910．欲使直线系具有包络（即形成可展曲面），需要有

$$p = c \pm \frac{t^2}{2},\quad c = 常数。$$

由脊线形成的图形由方程

$$9(xz-y)^2-4z^6=0$$

确定。

脊线方程：

$$x = c \pm \frac{t^2}{2},\quad y = -\frac{t^3}{6} \mp ct,\quad z = \mp t。$$

与xOy平面的交线：

$$8(x-c)^3-9y^2=0。$$

911．取圆柱轴为Oz轴，而Ox轴置于截平面上，那么圆柱面方程将为

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = au,$$

而截面方程为

$$z = Ay,$$

将柱面沿与Ox轴相交的母线剪开，并将它贴合在xOz平面上。因为贴合后柱面的正交截线的弧长$s = at$将起着横坐标的作用，那么所求曲线的方程将是

$$z = aA\sin(s/a)$$

——正弦曲线。

912．设过直线d的平面δ与球面沿圆γ相交。观察沿

γ与球面相切的圆锥。它的母线与圆的正交轨线相切，但所有这些锥面的顶点都位于d的极线直线d′上，因此，球面与过d′的平面束相交而成的圆将是正交轨线。

913. 点沿曲面移动的一般方程为

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}=\overline{F}+R\overline{n}-\mu|R|\overline{\alpha}$$

其中$\overline{F}$是外力，R是曲面的法向反力，μ是摩擦系数，$\overline{\alpha}$是轨迹的切线单位矢量及$\overline{n}$是曲面的法线单位矢量。

因为

$$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}\overline{\alpha}+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\overline{\alpha}}{ds},$$

因此在F＝0时，运动方程为

$$m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\overline{\alpha}+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\overline{\alpha}}{ds}\right)=R\overline{n}-\mu|R|\overline{\alpha}。$$

将它与$\overline{\alpha}\times\overline{n}$作数量积，得

$$\left(\overline{\alpha},\ \overline{n},\ \frac{d\overline{\alpha}}{ds}\right)=\left(\frac{d\overline{r}}{ds},\ \overline{n},\ \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right)=0,$$

即点沿测地线移动（参看843题）。

914. $x=F_x\Phi$，$y=F_y\Phi$，$z=F_z\Phi$，其中

$$\Phi=\frac{xF_x+yF_y+zF_z}{F_x^2+F^2+F_z^2}$$

而点$M(x,\ y,\ z)$满足方程

$$F(x,\ y,\ z)=0。$$

915. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+\varepsilon b^2y^2+\varepsilon'c^2z^2$。

916. $2z(x^2+y^2+z^2)=ax^2+by^2$。

917. $z(x^2+y^2+z^2)+axy=0$。

919. 可展曲面。

920. 只有可展曲面。

922. 将已知的测地线族之一作为半测地坐标系的 u 线。那么

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2。$$

如果 φ 是坐标曲线 u 和第二族测地线的夹角，则

$$\cos\varphi = \frac{du}{\sqrt{du^2 + G\,dv^2}}。$$

由角 φ 是常数这个条件，得

$$\frac{du}{dv} = a\sqrt{G}，\text{其中}\quad a = \text{常数}。$$

将此代入测地线的微分方程，得 $G_u = 0$，因此 $G = G(v)$，第一二次形式可变为

$$ds^2 = dx^2 + dy^2。$$

反过来，设 S 是可展曲面。因为它可贴合到平面，而在贴合时测地线仍变为测地线，且曲线间的角度保持一定，因此足以看出，在平面上上述的测地线族是存在的。

923. 测地线的点在锥面的母线上，锥面母线位于该测地线的从切面上，因此，由锥面顶点向密切面所作的垂线与切线相交。它的长

$$d = p\sin\alpha,$$

其中 p 是母线线段，α 是母线与切线的夹角，当锥面贴合到平面时，测地线变为直线，而沿它距离 d 为常数，但是 p 和 α 值同在锥面上具有一样的值，因此在锥面上 $p\sin\alpha = d$ 也是常数。

为了证明逆定理，只要判定，具有上述性质的曲线在锥面贴合到平面时变为直线。

924. 在曲面上取半测地坐标系，则

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2,$$

在曲线 $u = 0$ 上有 $\sqrt{G}\,|_{u=0} = 1$。此外，由测地线方程得，

$\left.\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right|_{u=0} = 0$，在半测地坐标系下

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}\text{（参看749题）。}$$

1)如果 $K = 0$，则

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} = 0,$$

介这个满足上述初始条件的方程，将有 $\sqrt{G} = 1$。因此，对于全曲率为0的所有曲面，第一二次形式为

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

因此，它们彼此全部贴合。

2)如果 $K = \frac{1}{a^2}$（a = 常数），则

$$\sqrt{G} = \cos(u/a)\text{和}ds^2 = du^2 + \cos^2(u/a)dv^2\text{。}$$

3)如果 $K = -\frac{1}{a^2}$（a = 常数），则

$$ds^2 = du^2 + ch^2(u/a)dv^2\text{。}$$

933. 曲面S在点M的切平面具有矢量 $\partial_u\overline{r}$ 和 $\partial_v\overline{r}$ 作为自己的方向矢量，其中 $(U, \overline{r})$ 是S的参数表示。对于仿射变换 $\mathscr{A}$，$(U, \mathscr{A}\circ\overline{r})$ 有曲面的参数表示 $\mathscr{A}(S) = S'$，而曲面 S' 在点 $\mathscr{A}(M) = M'$ 的切平面的方向矢量将是矢量 $\partial_u(\mathscr{A}\circ\overline{r})$ 和 $\partial_v(\mathscr{A}\circ\overline{r})$。但是 $\partial_u(\mathscr{A}\circ\overline{r}) = (\mathscr{A}\partial_u\overline{r})$，$\partial_v(\mathscr{A}\circ\overline{r}) = (\mathscr{A}\partial_v\overline{r})$。因此，在 $\mathscr{A}$ 的作用下S的切平面

变为S'的切平面。

939. 仿射性质。

940. 度量性质，因为例如圆借助仿射变换能变为椭圆。

941—946. 度量性质。

947—948. 仿射性质。

949—952. 度量性质。

953. 仿射性质。

954. 度量性质，因为，例如在仿射变换

$$\tilde{x}=x \qquad \tilde{y}=y \qquad \tilde{z}=kz$$

下，悬链面

$$x=a\,ch(u/u)\cos v,\quad y=a\,ch(u/a)\sin v,\quad z=u$$

的主法截线之一（在xOy平面上的圆）不改变自己的曲率。而第二个截线（悬链面的径线）曲率是要改变的，因此中曲率改变。

955. 仿射性质。因为点的类型是由曲面在该点渐近方向的数目多少而区分的。

956. 度量性质。

957. 仿射性质。

958. 利用题目的仿射性质，用仿射变换$x'=\frac{1}{a}$，$y'=\frac{1}{b}y$，将已知椭圆变为圆

$$x'^2+y'^2=1,$$

则共轭直径变为彼此正交的圆的直径。而圆

$$x'^2+y'^2=\frac{1}{2}$$

将为椭圆弦的象的包络，因此所求的包络将为椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}\qquad\text{（图196）。}$$

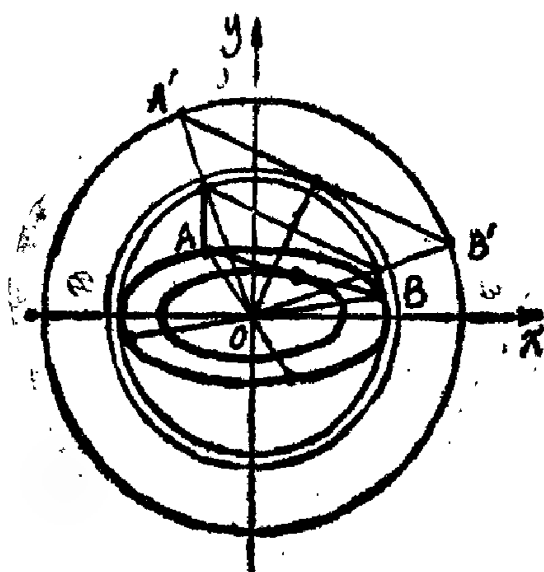


图 196

959. 利用题目的仿射性质，用仿射变换 $x'=x/a$，$y'=y/b$，将已知椭圆变为圆

$$x'+y'^2=1$$

并利用已知公式 $S'=S\triangle$，其中△是仿射变换的行列式，在此 $\triangle=1/ab$ 和 $S'=S/ab$。已知直线的象的包络将为半径 $R'=\cos S'$ 的圆，即

$$x'^2+y'^2=R'^2。$$

因此所求的方程将是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\frac{S}{ab}。$$

这是一个与已知椭圆相似的椭圆，相似系数为 $\cos(S/ab)$。

960. 把已知直线作为仿射坐标系的轴，而把其上的单

位矢量作为尺度矢量（图197）。取族的直线AB，使AB垂直于坐标角的一个平分线。观察以坐标轴为渐近线并与直线AB相切于点M（a、a）的双曲线，它的方程为$xy=c$。用S表示c：

$$OA=OB=2a,\quad S=2a^2\sin2\alpha,$$

圆为点M在双曲线上，那么$a^2=c$，从而得

$$c=\frac{S}{2\sin2\alpha}。$$

因此、双曲线的方程将为

$$xy=\frac{S}{2\sin2\alpha}。\qquad (*)$$

现在作双曲线的变换，使双曲线（*）仍为自己，而点M变为任意一个点$\overline{M}$。大家知道，此时弦AB变为双曲线在点$\overline{M}$的切线，而此切线从坐标角截得的三角形同样有面积S，即变成已知直线族的任意一条直线。

这样，双曲线（*）是截第一和第三坐标角为面积S的

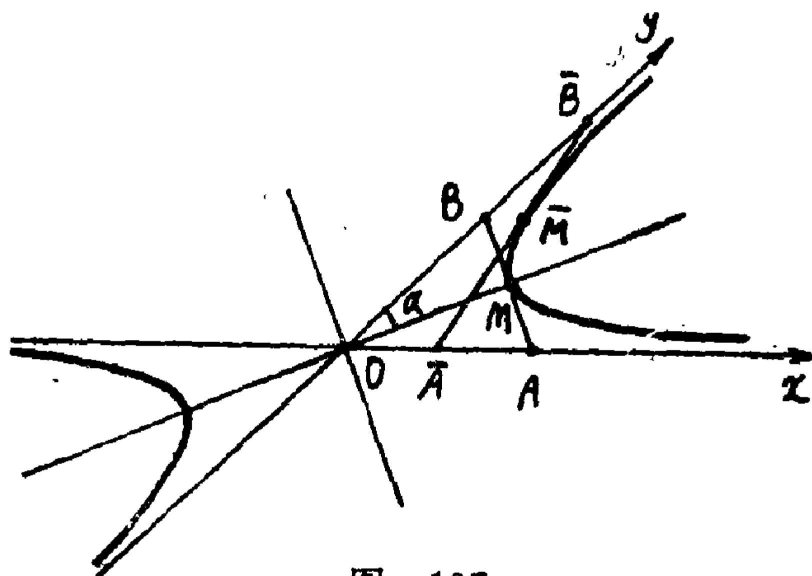


图 197

三角形的直线族的包络。类似地，共轭双曲线

$$x\,y=-\frac{S}{2\sin 2\alpha}$$

是截第二和第四坐标角为面积S的三角形的直线族的包络。

961．观察族中与Oy轴垂直并交轴于点M（o、b）的直线LN。用S表示b：

$$S=2\int_0^{\sqrt{b/a}} a\,x^2 d\,x,$$

故得

$$b=\left(\frac{9\,a\,S^2}{4}\right)^{1/8}。$$

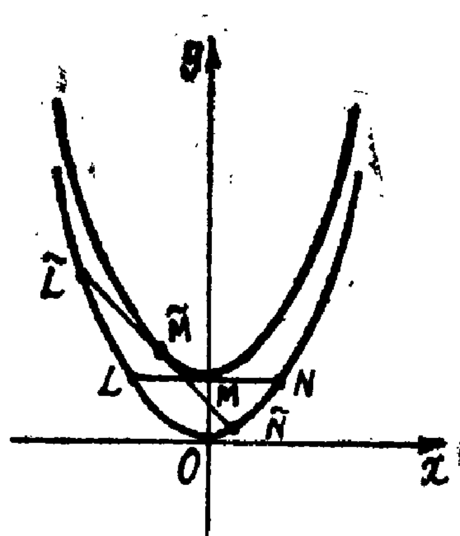


图 198

建立抛物线，这个抛物线是由已知抛物线沿Oy轴移动b而得到。它的方程：

$$y=a\,x^2+\left(\frac{9\,a\,S^2}{4}\right)^{1/3}。\qquad (*)$$

现在作抛物线的变换，使抛物线变为自己，而点M变为任意

一点$\widetilde{M}$，同时抛物线$y=ax^2$同样也变为自己，而弦LN变为抛物线（*）在点$\widetilde{M}$的切线，即变为已知直线族的任一直线，这样抛物线（*）是所求的包络（图198）。

962。设

$$\overline{\rho}=\overline{r}(u)+v\overline{e}(u)$$

是斜直纹曲面的方程。它的第二二次形式为

$$\varphi=L\,du^2-2M\,du\,dv,$$

其中

$$L=\frac{v^2(\overline{e}',\overline{e},\overline{e}'')+v[(\overline{e}',\overline{e},\overline{r}'')+(\overline{r}',\overline{e},\overline{e}'')]+(\overline{r}',\overline{e},\overline{r}'')}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$M=\frac{(\overline{r}',\overline{e},\overline{e})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

由条件

$$L\,du^2+2M\,du\,dv=0$$

求得与直母线方向不同的渐近方向的特征是矢量

$$\overline{\rho}_u+\overline{\rho}_v\frac{dv}{du}=\overline{r}'+v\overline{e}'-\frac{L}{2M}\overline{e}$$

（据题目条件$M\neq0$）。

沿对应$u=u_0$的母线渐近曲线的切线形成的曲面方程为

$$\overline{R}=\overline{r}_0+v\overline{e}_0+w\left(\overline{r}_0+v\overline{e}_0'-\frac{L_0}{2M_0}\overline{e}_0\right)。(*)$$

选取原点在径矢为$\overline{r}_0$的点A_0和坐标轴的尺度矢量为$\overline{r}_0',\overline{e}_0,\overline{e}_0'$的仿射坐标系。引入符号：

$$\frac{(\overline{e}_0',\overline{e}_0,\overline{e}_0'')}{(\overline{r}_0',\overline{e}_0,\overline{e}_0')}=a,$$

$$\frac{(\bar{e}_0', \bar{e}_0, \bar{r}_0'') + (\bar{r}_0', \bar{e}_0, \bar{e}_0'')}{(\bar{r}_0' \bar{e}_0 \ \bar{e}_0')} = b$$

$$\frac{(\bar{r}_0', \bar{e}_0, \bar{r}_0'')}{(\bar{r}_0', \bar{e}_0, \bar{e}_0')} = c$$

（a， b， c 是常数）。

那么曲面的方程能写成

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= w, \\ x_2 &= v - \frac{w}{2}(av^2 + bv + c), \\ x_3 &= vw, \end{aligned}\right\}$$

故得

$$x_1 x_2 = x_3 - \frac{a}{2}x_3^2 - \frac{b}{2}x_1 x_3 - \frac{c}{2}x_1^2。$$

按公式

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 \\ \tilde{x}_2 &= \frac{c}{2}x_1 + x_2 + \frac{b}{2}x_3 \\ \tilde{x}_3 &= x_3 \end{aligned}\right\}$$

变换坐标得

$$\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \frac{a}{2}\tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_3 = 0。$$

如果 $a \neq 0$，得到单叶双曲面；如果 $a = 0$，得到双曲抛物面（条件 $a = 0$ 意味着，原曲面是由平行于某平面的直线形成）。

963. $x^2 + y^2 = C$—同心圆和点O（0， 0）。

964. $x^2 - y^2 = C$—共渐近线的等边双曲线和它们的

渐近线（图199）。

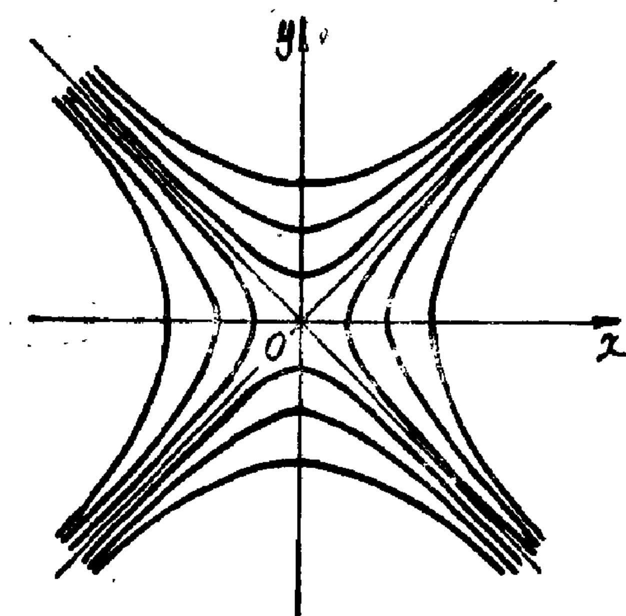


图 199

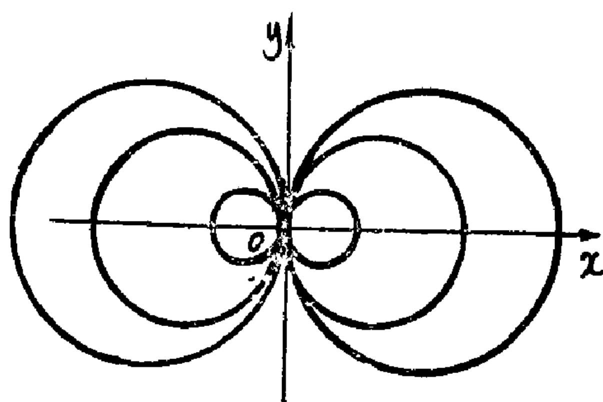


图 200

965. $y = Cx^2$—抛物线和直线 $y = 0$。

966. $C(x^2 + y^2) = 2x$—圆族和直线（图200）。

967. $Cx^2 = 2x - y + 1$—具有平行 Oy 轴的对称轴。

过点（0，1）并与直线$2x-y+1=0$相切于此点的抛物线族及这条直线本身（图201）。

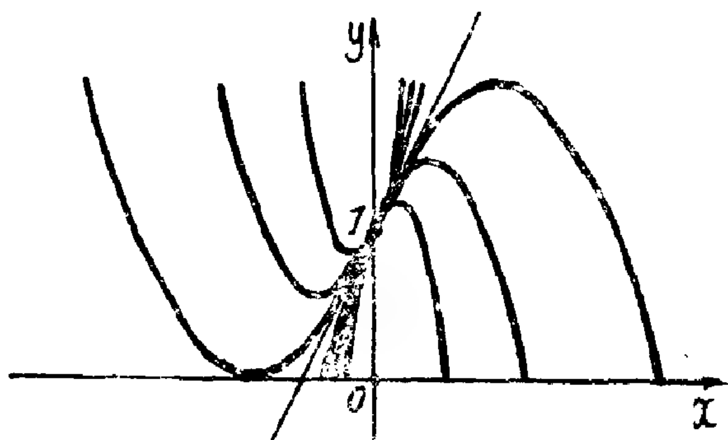


图 201

968. $x+y+z=C$—平行平面。

969. $x^2+y^2+z^2=C^2$—同心球面。

970. $x^2+y^2-z^2=C$—具有公共渐近锥面的单叶双曲面以及这个锥面本身（图202）。

971. $-4C^2(x^2+y^2)+4(256-C^2)z^2=C^2(256-C^2)$（$C\geqslant 0$）。当$C=0$时得到$xOy$平面，当$0<C<16$时是以$Oz$为旋转轴的旋转双叶双曲面（图203），当$C=16$是$Oz$轴，当$C>16$是以$Oz$为旋转轴的旋转椭园面（图204）。

972. 1。

973. 5。

974. （0，0），（1，1）。

975. N（7，2，1）。

976. $(2x-y-z)\overline{i}+(4y+z-x)\overline{j}+(6z$

$-x+y)\overline{k}$。

977. $3(x^2-ayz)\overline{i}+3(y^2-axz)\overline{j}+3(z^2-ayx)\overline{k}$。

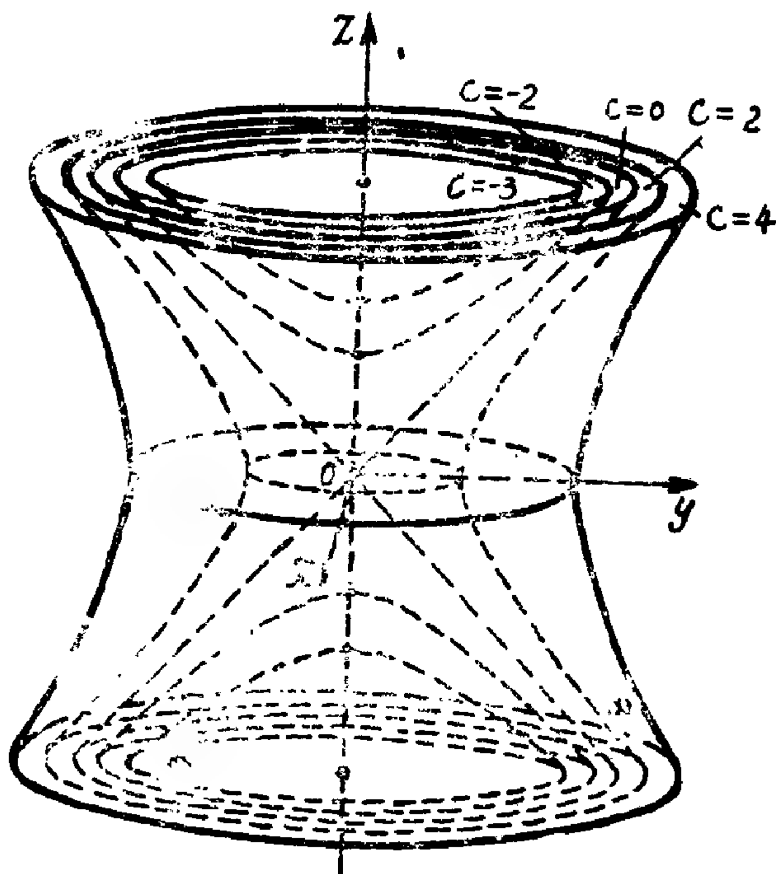


图 202

978. $e^{x+y+z}[yz(x+1)\overline{i}+xz(y+1)\overline{j}+xy(z+1)\overline{k}]$。

979. $\frac{1}{1+x^2}\overline{i}+\frac{1}{1+y^2}\overline{j}+\frac{1}{1+z^2}\overline{k}$。

980. $9\overline{i}-3\overline{j}$。

981. $|\text{grad } u| = 6$；$\cos\alpha = 2/3$，$\cos\beta = -2/3$，$\cos r = 1/3$。

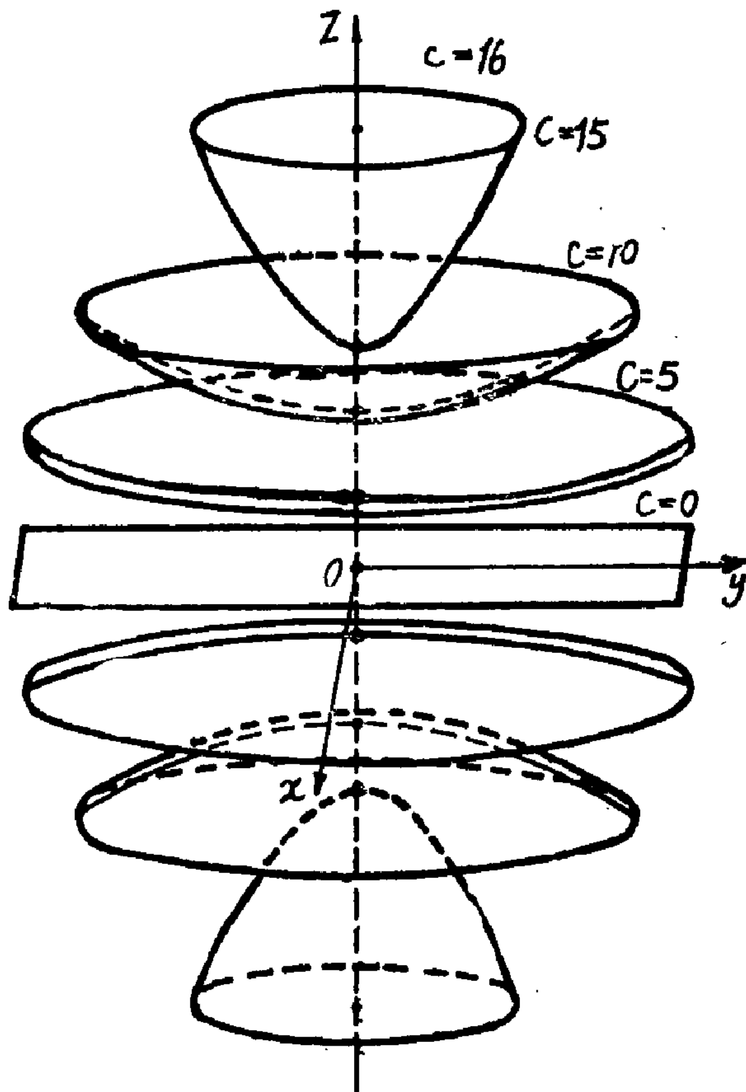


图 203

982. $\text{grad } u(O) = 3\overline{i} - 2\overline{j} - 6\overline{k}$，$|\text{grad } u(O)| = 7$，
$\cos\alpha = 3/7$，$\cos\beta = -2/7$，$\cos\gamma = -6/7$
$\text{grad } u(A) = 7\overline{i}$，$|\text{grad } u(A)| = 7$；

$\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$；在点 $N(-2,1,1)$，$\mathrm{grad}\ u=\overline{0}$，

983. $\cos\varphi=3/\sqrt{10}$。

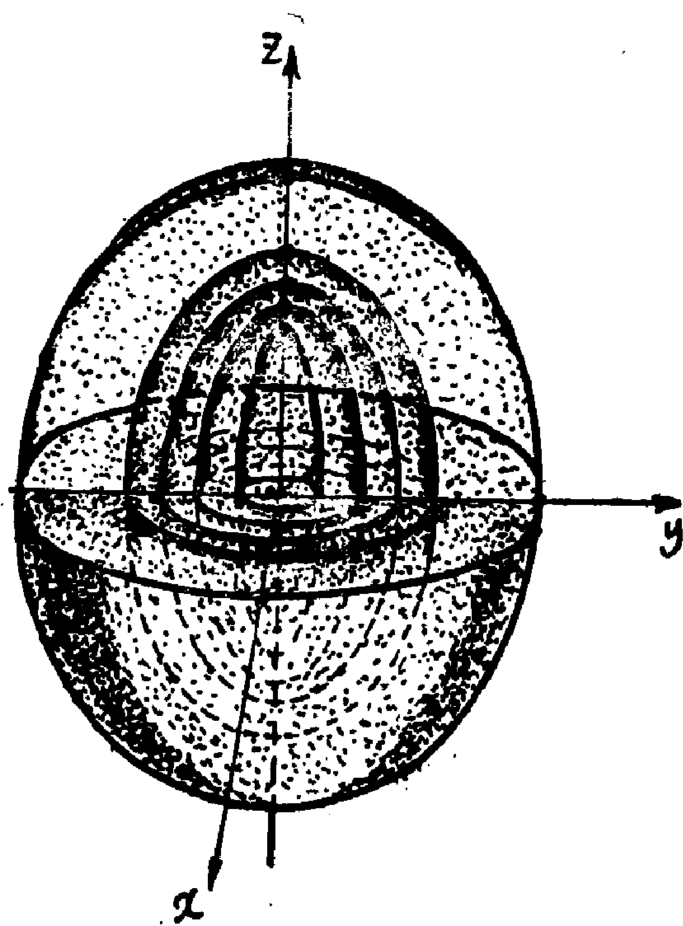


图 204

984. $\cos\varphi=-\frac{8}{2025}$。

985. $\frac{\pi}{2}$。

986. 增加；12。

987. $M_1(\frac{4}{5}, \frac{-1}{4})$，$M_2(-\frac{4}{5}, \frac{9}{4})$。

988. $\frac{2u}{r}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；如果 $a=b=c$。

989. $\frac{\text{grad}\, u \cdot \text{grad}\, v}{|\text{grad}\, v|}$；如果 $\text{grad}\, u \perp \text{grad}\, v$。

997. 因为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，那么

$$\text{grad}\, r = \frac{\partial r}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\overline{k} = \frac{x}{r}\overline{i} + \frac{y}{r}\overline{j} + \frac{z}{r}\overline{k}$$

$$= \frac{\overline{r}}{r}$$

998. $f'(r)\frac{\overline{r}}{r}$。

999. $n r^{n-2}\overline{r}$。

1000. $-\frac{\overline{r}}{r^3}$。

1001. $\frac{\overline{r}}{r^2}$

1002. 设 $\overline{c} = c_1\overline{i} + c_2\overline{i} + c_3 k$，

则 $u = \overline{c}\cdot\overline{r} = c_1 x + c_2 y + c_3 z$，

故得 $\frac{\partial u}{\partial x} = c_1$，$\frac{\partial u}{\partial y} = c_2$，$\frac{\partial u}{\partial z} = c_3$。

因此 $\text{grad}\, u = \text{grad}(\overline{c}\cdot\overline{r}) = c_1\overline{i} + c_2\overline{j} + c_3\overline{k} = \overline{c}$

1003. $\frac{\overline{a}(\overline{b}\cdot\overline{r}) - \overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{r})}{(\overline{b}\cdot\overline{r})^2}$。

004. $2\overline{r}(\overline{c}\cdot\overline{c})-2\overline{c}(\overline{c}\cdot\overline{r})$。

$$=2\overline{c}\times(\overline{r}\times\overline{c})$$

1008. 设$\overline{e}_u$,$\overline{e}_v$,$\overline{e}_w$是活动标架的单位矢量，矢量$\overline{э}_u$,$\overline{э}_v$位于曲而坐标w=常数的切平面上。因此矢量$\overline{e}_w$垂直这个平面，所以这个矢量垂直于坐标曲面w=常数，因此这矢量平行于数量w的梯度，即

$\overline{e}w=k_3\text{grad}w$， (*)

其中k_3是某个因子。再看曲线$u=u(s)$， $=v(vs)$，$w=w(s)$。微分其任意点的径矢

$$\overline{r}=\overline{r}(u(s),\ v(s),\ w(s)),$$

得到

$$\frac{d\overline{r}}{ds}=\overline{r}_u\frac{du}{ds}+\overline{r}_v\frac{dv}{ds}+\overline{r}_w\frac{dw}{ds}。$$

将这个等式与grad w作数量积：

$$\frac{dw}{ds}=\frac{dw}{ds}\overline{r}_w\cdot\text{grad }w,$$

由此$\overline{r}_w\cdot\text{grad }w=1$。注意到$\overline{r}_w=|\overline{r}_w|\overline{э}_w$，并将等式(*)与$\overline{r}_w$作数量积，得$|\overline{r}_w|=k_3$。等式(*)求得$1=k_3|\text{grad}w|$。运用类似推论于坐标曲面$u$=常数和$v$=常数，得到

$$\text{grad }f(u、v、w)=\frac{\overline{e}_u}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\overline{e}_v}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\overline{э}_w}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}$$

其中$k_1=|\overline{r}_u|=\dfrac{1}{|\text{grad }u|}$，$k_2=|\overline{r}_v|=\dfrac{1}{|\text{grad }w|}$

$$k_s = |\overline{r}_w| = \frac{1}{|\mathrm{grad} w|}。$$

1009. $\mathrm{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\overline{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\overline{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{e}_z$。

1010. $\varphi\overline{e}_r + \overline{e}_\varphi + \overline{e}_z$。

1011. $z\varphi\overline{e}_r + z\overline{e}_\varphi + r\varphi\overline{e}_z$。

1012. $\overline{e}_r + \frac{z\cos\varphi}{r}\overline{e}_\varphi + \sin\varphi\,\overline{e}_z$。

1013. $2r\overline{e}_r - \frac{z\sin\varphi}{r}\overline{e}_\varphi + \cos\varphi\,\overline{e}_z$。

1014. $3r^2\overline{e}_r + \frac{z\sin 2\varphi}{r}\overline{e}_\varphi + \sin^2\varphi\,\overline{\partial}_z$。

1015.

$$\mathrm{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\overline{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\overline{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\overline{e}_\varphi.$$

1016. $\varphi\overline{e}_\rho + \frac{1}{\sin\theta}\overline{e}_\varphi$。

1017. $\theta\overline{e}_\rho + \overline{e}_\theta$。

1018. $\theta\varphi\overline{e}_\rho + \varphi\overline{e}_\theta + \frac{\theta}{\sin\theta}\overline{e}_\theta$。

1019. $\overline{e}_\rho + \frac{\varphi\cos\theta}{\rho}\overline{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\overline{e}_\varphi$。

1020. $\overline{e}_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}\overline{e}_\theta - \frac{\theta}{\rho}\overline{e}_\varphi$。

1021. $x^2 + y^2 = C_1^2$, $z = C_2$。

1022. $y = C_1 x$, $z = C_2 x^2$。

1023. $y-x=C_1xy$, $x-z=C_2xz$。

1024. $x^2-y^2=C_1$, $z=C_2x^2$。

1025. $x=C_1y$, $x=C_2z$。

1026. $yz+3+2z$。

1027. $12xy^2+4x^3-6xz$。

1033. 3。

1034. $\operatorname{div}(f(r)\overline{r})=f(r)\operatorname{div}\overline{r}+\overline{r}\cdot\operatorname{grad}f(r)$

因为 $\operatorname{div}\overline{r}=3$, $\operatorname{grad}f(r)=f'(r)\frac{\overline{r}}{r}$, 那么,

$\operatorname{div}(f(r)\overline{r})=3f(r)+rf'(r)$。

1035. $\frac{2}{r}$。

1036. $(n+s)r^n$。

1037. $\operatorname{div}(\operatorname{grad}f(r))=\operatorname{div}\left(\frac{f'(r)}{r}\overline{r}\right)$

$$=\frac{f'(r)}{r}\operatorname{div}\overline{r}+\overline{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{f'(r)}{r}$$

$$=\frac{3f'(r)}{r}+\overline{r}\cdot\frac{r\operatorname{grad}f'(r)-f'(r)\operatorname{grad}r}{r^2}$$

$$=\frac{3f'(r)}{r}+\overline{r}\,\frac{f''(r)\frac{\overline{r}}{r}-f'(r)\frac{\overline{r}}{r}}{r^2}$$

$$=\frac{3f'(r)}{r}+\overline{r}\,\frac{rf''(r)-f'(r)}{r^2}\cdot\frac{\overline{r}}{r}$$

$$=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)。$$

1038. $\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$。

1039. $u\triangle u+(\mathrm{grad}\ u)^2$

1040. $u\triangle u+\mathrm{grad}u\ \mathrm{grad}v$

1041. $\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r}$。

1042. $2\overline{c}\cdot\overline{r}$。

1043. $f'(r)\ \frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r}$。

1044. 0。

1045. $\overline{c}\cdot\overline{c}_1$。

1046. $4\overline{c}\cdot\overline{c}_1$。

1047. 1。

1048. 2。

1049. $\frac{x+y+z}{xyz}$。

1050. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,f(r))=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$。

这个方程的通解是 $f(r)=c_1+\frac{c_2}{r}$。

1051. 因为$\mathrm{div}\frac{\overline{r}}{r}=\frac{2}{r}$和$\mathrm{div}\ (\mathrm{grad}f(r))=f''(r)+\frac{r}{2}f'(r)$，那么根据条件$2rf''(r)+4f'(r)=\frac{2}{r}$，

故得 $f(r)=\ln r+\frac{c_1}{r}+c_2$。

1052. $\operatorname{div}\overline{a}=\frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u)+\frac{\partial}{\partial v}(NLa_v)+\frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right]$，其中 a_u，a_v，a_w是矢量 $\overline{a}$在相应坐标曲线的切线上的投影，

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2},$$

量L，M，N称为拉美系数。

1053. $\operatorname{div}\overline{a}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$

1054. $\operatorname{div}\overline{a}=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2\sin\theta)+\rho\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\sin\theta)+\rho\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]$。

1055. $(x^2-2xz)\overline{i}+(y^2-2xy)\overline{j}+(z^2-2yz)\overline{k}$。

1056. $\overline{i}+(xy-2x)\overline{j}+(2-xz)\overline{k}$。

1060. $\overline{o}$。　1061. $\overline{o}$。　1062. $-2\overline{c}$。

1063. $\overline{c}\times\overline{r}$。1064，1065. $\overline{c}_1\times\overline{c}$。1066. $\overline{o}$。

1067. $\frac{f'(r)}{r}(\overline{r}\times\overline{c})$。

1073. 为了计算流量利用奥斯特洛格拉得斯基公式

$$\Pi=\iint_S a_n\,d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\overline{a}\,dw$$。因为

$\operatorname{div}\overline{a}=y^2+x^2+1$，因此

$$\Pi=\iiint_V (x^2+y^2+1)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\iint_D (x^2+y^2+1)\,dx\,dy\int_0^{4-x^2-y^2}dz$$

$$=\iint_D (x^2+y^2+1)(4-x^2-y^2)\,dx\,dy$$。

转为极坐标：

$$\Pi=\iint_D (r^2+1)(4-r^2)r\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2(-r^5+3r^3+4r)\,dr$$

$$=\frac{14\pi}{3}$$。

1074. $\operatorname{div}\overline{a}=3(x^2+y^2+z^2)$。根据奥斯特洛格拉得斯基公式

$$\Pi=\iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)\,dw$$

$$=3.8\iiint_{V_1}(x^2+y^2+z^2)\,dw,$$

其中V_1是球被含在第一卦限内的那部分范围。转为球面坐标：

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\theta,$$

$$dw=\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta,\quad x^2+y^2+z^2=\rho^2,$$

$$\Pi=24\iiint_{V_1}\rho^4\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$=24\int_0^R\rho^4 d\rho\int_0^{\pi/2}\sin\theta\, d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi$$

$=2.4\pi R^5$。

1075. $4\pi q$。　　1076. 0。　　1077. $\frac{10}{3}$。

1078. 1）$\frac{1}{10}\pi R^2H(3R^2+2H^2)$；

2）$\frac{3}{10}\pi R^2H(R^2+2H^2)$

1080. 在圆上$\overline{a}=R^3\cos^3t\,\overline{i}-R^3\sin^3t\,\overline{j}$，$d\overline{r}=-R\sin t\,dt\,\overline{i}+R\cos t\,dt\,\overline{j}$。因此$\overline{a}\cdot d\overline{r}=-\frac{1}{2}R^4\sin 2t\,dt$，在沿着圆弧L逆时针方向运动时，参数t在0到$\frac{\pi}{2}$的范围内变化。因此沿L的曲线积分将等于

$$A=\int_L\overline{a}\cdot d\overline{r}=-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}R^4\sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}R^4。$$

1081. $2\pi^2b^2$。

1082. 曲线L由两个线段BO（在Oy轴上）、OA（在

Ox轴上）和星形线的弧AB组成。沿L的绕行应该逆时针进行，因此矢量的环量将等于

$$\oint_L \overline{a}\cdot d\overline{r}=\int_{AB}\overline{a}\cdot d\overline{r}+\int_{BO}\overline{a}\cdot d\overline{r}+\int_{OA}\overline{a}\cdot d\overline{r}。$$

分别计算右边的每一个积分。在星形线上，

$$\overline{a}=R\sin^3 t\,\overline{i}-R\cos^3 t\,\overline{j},$$

$$d\overline{r}=-3R\cos^2 t\sin t\,dt\,\overline{i}+3R\sin^2 t\cos t\,dt\,\overline{j}。$$

因此$\overline{a}\cdot d\overline{r}=-\frac{3}{4}R^2\sin^2 2t\,dt$，在沿AB弧从A到B方向运动时参数t在0到$\frac{\pi}{2}$范围内变动。将有

$$\int_{AB}\overline{a}\cdot d\overline{r}=-\frac{3}{4}R^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=-\frac{3}{16}\pi R^2。$$

在线段OA上$\overline{a}=-x\overline{j}$，$d\overline{r}=dx\,\overline{i}$和$\overline{a}\cdot d\overline{r}=0$，因此$\int_{OA}\overline{a}\cdot d\overline{r}=0$。类似有$\int_{BO}\overline{a}\cdot d\overline{r}=0$，于是所求的环量等于$-\frac{3}{16}\pi R^2$。

1083. 0。1084. $-\pi b^2$。1085. 1) 2π；2) 2π。

1086. $-\pi R^6/8$。

1087. 没有。

1088. $\mathrm{rot}\,\overline{a}=\overline{0}$。因此场$\overline{a}$是势量场，它的势u由方程 $du=(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$ 确定，这个方程相当于偏微分方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=y+z,\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=x+z,\\ \frac{\partial u}{\partial z}&=x+y。\end{aligned}\right\}$$

由方程组的第一个方程得，$u=(y+z)x+\varphi(y,z)$，代入第二个方程得$\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}=z$，由此得$\varphi(y,z)=zy+\psi(z)$，将$u=xy+xz+zy+\psi(z)$代入第三个方程，得$\psi'(z)=0$即$\psi(z)=C=$常数。因而

$$u=xy+yz+zx+C。$$

1089． $u=xyz(x+y+z)+C$。

1090．是。